

AS RAÍZES ENÉSIMAS IRRACIONAIS: UMA PERSPECTIVA A PARTIR DAS FONTES SITUADAS NOS LIVROS DE HISTÓRIA DE MATEMÁTICA

IRRATIONAL NTH ROOTS: A PERSPECTIVE FROM SOURCES SITUATED ON HISTORY OF MATHEMATICS' BOOKS

WAGNER MARCELO POMMER*

RESUMO

Os números irracionais, como saber a ser ensinado, geralmente é introduzido na escolaridade básica por meio das raízes irracionais quadradas ou cúbicas, numa apresentação polarizada entre o pragmático e o teórico, com um desdobramento situado em cálculos operatórios específicos. O objetivo deste trabalho foi descrever e analisar quais os contextos da História da Matemática que poderiam contribuir para uma introdução e desenvolvimento significativo das raízes enésimas irracionais na escolaridade básica. Na parte metodológica, realizamos uma busca em livros que se propõem a realizar uma descrição e análise da História da Matemática. Neste material, constamos algumas contribuições com relação às raízes enésimas irracionais que poderiam enriquecer a visão polarizada usual presente nos livros didáticos da escolaridade básica. Porém, tais explorações mereceriam um tratamento adequado, de modo a efetivar uma transposição didática para o saber a ser ensinado na escolaridade básica, o que incentivaria uma releitura dos processos de ensino sobre o tema.

Palavras-chave: Números Irracionais. Raízes enésimas irracionais. História da Matemática. Polarização. Transposição Didática.

ABSTRACT

Irrational numbers, such as knowing to be taught, are usually introduced at basic schooling through the irrational square or cubic roots, in a polarized presentation between the pragmatic and the theoretical bias, with an unfolding situated at specific operative calculations. The objective of this work was to describe and analyze the inherent contexts of the History of Mathematics that could contribute to a significant introduction and development of the irrational nth roots at basic schooling. In the methodological part, we carry out a search in books that propose to carry out a description and analysis of the History of Mathematics. In this material, we present some contributions regarding the irrational nth roots that could enrich the usual polarized vision present in textbooks of basic schooling. However, such results deserve an adequate treatment, in order to effect a didactic transposition for the knowledge to be taught in basic schooling, which can promote a new reading of the teaching processes over this subject.

Keywords: *Irrational numbers. Irrational nth roots. History of Mathematics. Polarization. Didactic Transposition.*

* Doutor em Educação. DCET (Universidade Federal de São Paulo/Campus Diadema). wagner.pommer@unifesp.br

INTRODUÇÃO

No ensino atual de matemática, a introdução aos números irracionais se situa no 7^o ano do Ensino Fundamental, ao situar as raízes quadradas e cúbicas, porém ligado a aspectos pragmáticos. Porém, ao realizarmos uma consulta aos PCN, expressos em Brasil (1998), existe menção que o trabalho com números irracionais, no ensino fundamental, se encontra simplificado, limitando-se a apresentação de algumas raízes enésimas irracionais, na exposição de propriedades de radicais, em cálculos operatórios com radicais e na apresentação de π .

De fato, as pesquisas de Pommer (2011) e Silva (2011) revelaram que alguns manuais escolares expõem exemplos numéricos envolvendo lados e arestas no âmbito de números inteiros ou a uma relação de números inteiros. Nestes livros didáticos, a escolha de valores de área se situa em quadrados perfeitos, de modo que o conceito de raiz quadrada ficou associado ao lado de uma figura geométrica, este expresso por um número inteiro ou racional.

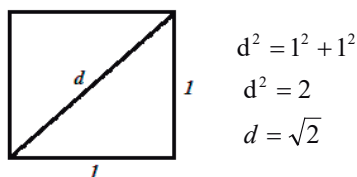
As pesquisas acima citadas comentam que se segue o desenvolvimento do tema pela introdução de valores de área que não são quadrados perfeitos, o que recai no uso do Teorema de Pitágoras. Daí, por meio do uso de calculadora eletrônica para expressar os resultados, os livros didáticos usualmente expressam um valor aproximado para uma ou duas casas decimais, dizendo que o resultado é um número irracional.

Este modo de exposição acaba não esclarecendo a natureza teórica associado aos números irracionais. Ao aluno fica a impressão que basta realizar um cálculo aproximado, não se aprofundando o significado do conceito de aproximação como modo de acessar os números irracionais ao mundo pragmático.

Em outros manuais didáticos, há uma exposição mais voltada a aspectos teóricos, onde os números irracionais são usualmente apresentados como uma coleção de números reais que 'não' são racionais. Ripoll (2001) comenta que este tipo circular de definição, feito por exclusão ou negação, inibe a exploração de alguns aspectos essenciais dos números irracionais, no ensino básico.

Por outro lado, Silva (2011) observou que nos livros didáticos existe uma tendência de valores prototípicos, como é o caso de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, geralmente abordados de modo sistematizado e teórico, pela aplicação do teorema de Pitágoras, conforme se observa na figura 1. Historicamente há fortes indícios que este processo não foi o utilizado pelos antigos gregos, de acordo com Boyer (1991) e Struik (1992).

Figura 1 - Obtenção de $\sqrt{2}$.



Fonte: Smole; Diniz (2008)

Em outros manuais escolares, há a representação geométrica de $\sqrt{2}$, na reta real, o que acaba introduzindo os números reais como a união do conjunto dos números racionais e dos números

reais (Pommer, 2011). Ao que se segue, os números irracionais são definidos como as dízimas não periódicas, em contraposição as dízimas periódicas, ou seja, os números racionais.

Deste modo, as raízes enésimas irracionais geralmente são apresentadas nos manuais escolares por meio de duas visões antagônicas: a pragmática e a teórica. Em seguida, os manuais desenvolvem o tema por meio de inúmeros exercícios de aplicação imediata, envolvendo as propriedades de radicais.

Em face destas constatações presente em vários livros didáticos de mercado editorial brasileiro, questionamo-nos se esta visão predominante em vários livros didáticos de mercado editorial brasileiro se encontra presente no desenvolvimento histórico-epistemológico das raízes enésimas irracionais.

Para viabilizar o contexto citado com relação aos números irracionais, realizamos busca em livros de referência que se propõem a realizar uma descrição e análise da História da Matemática. Em síntese, este texto teve como foco descrever e analisar quais os contextos da História da Matemática que poderiam contribuir para uma introdução e desenvolvimento significativo das raízes enésimas irracionais na escolaridade básica.

REFERENCIAL TEÓRICO

A organização da Matemática pode ser enganadora em um aspecto básico. O saber matemático oferecido em livros de referência usualmente se atem a uma apresentação lógica organizada, práxis¹ que deixa a impressão de que os matemáticos, a partir de uma definição, constroem o conhecimento de teorema em teorema, de forma espantosamente natural e podem resolver qualquer dificuldade.

Kline (1976) aponta que a história pode proporcionar uma perspectiva total e relacionar tópicos dos diferentes áreas, pois esta nos ensina que o desenvolvimento de um tema se faz pouco a pouco, com resultados que provém de diversas direções. Porém, muitas contribuições advindas da história do conhecimento matemático se encontram simplificadas na escolaridade básica.

O uso da história da Matemática deve promover uma continuidade com relação ao significado de objetos matemáticos usuais da escola básica. Neste mote, não é possível se:

[...] ensinar qualquer conteúdo, das ciências às línguas, passando pela Matemática, sem uma visão histórica de seu desenvolvimento. É na História que se podem perceber as razões que levaram tal ou qual relação, tal ou qual conceito, a serem constituídos, reforçados ou abandonados (MACHADO, 2004, p. 103).

Para os PCN, descritos em Brasil (1998), a utilização da história da Matemática permite entender que o conhecimento matemático sofreu revezes, de acordo com aspectos culturais e econômicos de cada civilização. Assim, o desenvolvimento de conceitos matemáticos não necessita se submeter a linearização e a temporalidade dos fatos históricos. Os PCN destacam que a abordagem histórica consiste em “[...] um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-las a fatos, datas e nomes a serem memorizados” (BRASIL, 1998, p. 42).

Brolezzi (1991) reforça que, no âmbito escolar, há uma ausência de um princípio que permita “[...] contrapor uma concepção linear evolutiva da Matemática com uma visão que inverta o sentido da História, pois isso revelaria uma multiplicidade de caminhos para a construção de significados no ensino” (p. 4). De um modo especial, o autor destaca que é essencial se ater aos livros que se situam

¹ Práxis é o conjunto das ações ou usos das atividades humanas que delimitam as condições ou ordem indispensáveis à existência atividade material, a produção e a prática usual do objeto de estudo.

na História da Matemática, pois estas fontes contêm valiosos indícios e pormenores que podem revelar as motivações para o surgimento das ideias ou conceitos matemáticos.

O caminho histórico constitui uma referência essencial e fonte de recursos para ampliar as discussões para a compreensão da noção de número irracional. Observamos que esta via fica irremediavelmente atrelada ao estabelecimento de uma salutar rede de significações, conceito exposto em Machado (1995).

A concepção do conhecimento como rede de significações constitui uma imagem emergente para a representação do conhecimento, pois situa uma forma de maior compreensão na apresentação, organização e construção do conhecimento no mundo atual. Nesta perspectiva, conhecer é como:

[...] enredar, tecer significações, partilhar significados. Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. Os feixes de relações, por sua vez, articulam-se em uma grande teia de significações e o conhecimento é uma teia desse tipo (MACHADO, 2001, p. 4).

Levando-se em consideração os números irracionais, cujo aperfeiçoamento matemático levou séculos, a forma usual de apresentação deste tema em muitos dos livros didáticos de ensino básico, sem vínculos com a gênese histórica causa dificuldades na aprendizagem deste conhecimento escolar. Assim, a reflexão e análise em relação ao modo como ocorreu e se desenvolveu a rede histórica dos conhecimentos pode se constituir em apoio fundamental para encaminhar aportes que fundamentem uma visão de construção mais significativa dos números irracionais no ensino básico.

O REFERENCIAL METODOLÓGICO

A ausência da perspectiva da evolução histórica nos conhecimentos expressos nos livros didáticos abre uma possibilidade para a necessária crítica frente a este meio de trabalho escolar. Um fator que permite entender a problemática inerente aos manuais escolares é o conceito de transposição didática.

Os livros de História da Matemática podem se enquadrar no que Chevallard (1999) denomina de transposição didática. Nos livros de História da Matemática há uma transformação dos saberes científicos (*savoir savant*), aqueles que decorrem das descobertas dos grandes matemáticos e cientistas, em saberes a ensinar (*savoir à enseigner*), que estão presentes em materiais como os livros didáticos e paradidáticos, num contexto de Transposição Didática Externa.

Os livros de História da Matemática podem contribuir para esta etapa de transposição didática externa. Chevallard (1999) propõe que o processo histórico não implica que o aluno deva se apropriar do saber tal qual ele foi produzido pela comunidade de cientistas e pesquisadores. Cabe, assim, as diversas instituições promoverem ações de sistematizar e tornar ensinável o saber científico.

Uma primeira transformação do saber científico é denominada de transposição didática externa, configurando os saberes sábios em um saber a ensinar. Chevallard (1999) destaca que no processo de transposição didática, do saber sábio ao saber a ensinar, há uma descontextualização e despersonalização dos objetos (matemáticos ou não), separando-os das origens carregadas de contextos significativos devido às problemáticas ocorridas no processo de construção do saber.

Este processo pode ser concebido como uma ‘desistorização’ do saber, característico da transposição didática. Guichard (1986) aponta que a transposição didática externa torna o saber sábio uma realidade ahistórica, atemporal, que se impõe por si mesma, sem produtor, transparecendo ser isento de qualquer contexto e processo de produção. Deste modo, aos usuários (professores e alunos) não parece ser possível haver contestação quanto às origens, as utilidades e os significados do saber.

Como contribuição ao processo de historização, os livros de História da Matemática poderiam agregar elementos e parâmetros para a necessária atualização e crítica dos materiais didáticos atuais. A preocupação com o campo da didática é uma área de pesquisa que recentemente, em meados do século XX, passou a ser incorporada e discutida com relação aos livros de História da Matemática.

O historiador francês Henri-Irénée Marrou, em sua obra *Sobre o Conhecimento Histórico*, explica que o valor do recurso às fontes deve-se principalmente ao fato de o passado não poder ser alcançado diretamente, mas apenas *na medida em que* reencontramos os traços que ele deixou atrás de si, e também *na medida em que* formos capazes de interpretá-los, isto é, torná-los inteligíveis para nós (BROLEZZI, 1991, p. 3).

Para nos tornarmos capazes de interpretar as características peculiares dos livros de História da Matemática recorreremos a uma categorização. Os livros de História da Matemática podem ser concebidos segundo diversos modos, de acordo com certos objetivos

Um livro de História da Matemática pode ser organizado apenas tendo em vista a seqüência cronológica de eventos, ou como uma série de biografias, ou de acordo com os principais ramos da Matemática, ou como um livro fonte de material para estudo, ou com relação a resultados obtidos por um país ou povo, ou de vários outros modos, cada um dos quais pode ter certas vantagens (SMITH, 1923, p. iii).

Smith (1923) realizou um marco histórico na concepção dos livros de História de Matemática, apresentando a obra em dois volumes: em um deles apresenta a abordagem cronológica e no segundo, a apresentação por temas. Em obras posteriores, Smith novamente aborda outras formas de apresentação (temas específicos, época específica, civilização específica) da História da Matemática.

Com base na proposição de Smith (1923) utilizamos para análise dos livros de História de Matemática a seguinte tipologia: Cronologia; Biografias e Ramos da Matemática (assunto).

Na Cronologia Clássica há um relato sucinto das diferentes manifestações sobre História da Matemática proporcionando uma reconstituição do passado tendo como base em documentação disponível até a atualidade. Os livros desta categoria fornecem exemplos e características prototípicas das diversas manifestações situadas em época delineadas na linha de tempo sucessiva.

Os livros de Biografia têm como fundamento o que Smith (1923) argumentava: as anedotas e pequenos acontecimentos inusitados em torno da biografia dos autores quebram a monotonia da narrativa histórica e revelam o lado humano (não-sobrenatural) dos autores, o que melhoraria a motivação para a apresentação da Matemática.

Quanto aos livros de História da Matemática por assunto ou tema, estes se fundamentam em uma intenção semelhante à exposição de um livro didático da escolaridade básica e ao trabalho didático do professor em sala de aula.

Nosso referencial de pesquisa será a pesquisa qualitativa do tipo bibliográfico. Oliveira (2007) coloca que a pesquisa bibliográfica é uma modalidade de investigação de documentos que se situam em certo domínio ou fonte científica, sem necessariamente recorrer a fatos ou fenômenos da realidade empírica. Ainda, a autora acrescenta que a pesquisa bibliográfica remete para as contribuições de diferentes autores sobre o tema, o que recai sobre a pesquisa de fontes secundárias.

O ponto principal nas várias pesquisas qualitativas que envolvem documentos não é a análise de um texto, mas principalmente o:

[...] cruzamento e confronto das fontes é uma operação indispensável, para o que a leitura hermenêutica da documentação se constitui em operação importante do processo de investigação, já que nos possibilita uma leitura não apenas literal das informações contidas nos documentos, mas uma compreensão real, contextualizada pelo cruzamento entre fontes que se complementam, em termos explicativos (CORSETTI, 2006, p. 36).

Para a escolha dos documentos a serem analisados, o levantamento bibliográfico se fundamentou em livros que envolvem a História da Matemática, como fonte secundária, esta entendida com um texto que tratam de informações gerais envolvendo o tema a ser pesquisado, tendo como base o critério de diversidade de fontes bibliográficas. Deste modo, escolhemos uma amostra de livros de História da Matemática como representantes do conhecimento histórico-epistemológico dos números irracionais, tomando-se a possibilidade de uso de autores com edições sucessivas, que garantem maior credibilidade na comunidade de pesquisadores.

Nesse sentido, utilizamos como referência para a análise quatro livros de História da Matemática: Paul Karlson (1961), Carl Boyer (1991), Dirk Struik (1992) e Otto Bekken (1994), listados nas referências bibliográficas e indicados no quadro 01.

Quadro 01 - Sinopse de tipologia de livros utilizados.

	Cronologia Clássica	Biografia	Assunto
Boyer	X		
Struik		X	
Karlson			X
Otto Bekken			X

No material escolhido, foi realizada uma leitura preliminar de reconhecimento, seja pelo uso de índice remissivo ou pelo índice, para efetivar uma leitura flutuante sobre o texto, de modo a encontrar indicações envolvendo os números irracionais. O passo seguinte foi realizar uma leitura seletiva, de modo a angariar os possíveis registros das informações envolvendo as raízes enésimas irracionais.

Após o recolhimento e exposição dos resultados, procedeu-se a uma análise da pertinência do tema no ambiente educativo da escolaridade básica, em face da escolha dos referenciais teóricos delineados, de modo a responder ao objetivo desta pesquisa. A seguir, analisamos as contribuições presentes em alguns livros de História da Matemática no tocante aos números irracionais que poderiam ampliar a apresentação simplificadora das raízes enésimas irracionais na escolaridade básica.

AS RAÍZES ENÉSIMAS IRRACIONAIS: A ABORDAGEM NOS LIVROS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Uma importante ilustração ausente de diversos livros didáticos se encontra em um texto cuneiforme, da coleção de Yale, com referência a Mesopotâmia Antiga (~1600 a.C.). Autores como Boyer (1991) e Bekken (1994) citam a representação de um quadrado e suas diagonais, cuja razão entre o comprimento da diagonal e do lado ($\sqrt{2}$) era dada por 1:24,51,10, ou seja, $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ na base sexagesimal. O cálculo aproximado deste número é 1,4142129, na nossa atual base dez, expresso com um erro de cerca de 1 milionésimo, o que indica terem os babilônios técnicas suficientes para obter uma boa aproximação para o número irracional $\sqrt{2}$.

A retomada da exploração do contexto da base sexagesimal, assunto que pertence ao currículo do Ensino Fundamental, permitiria escrever e explorar as boas aproximações de números irracionais, de elevada ordem de grandeza e com poucos algarismos sexagesimais, se comparados a base 10. Este fator permite discutir um aspecto favorável a base sexagesimal: a maior quantidade de frações finitas que existem na base 60, o que acarreta a facilidade e a possibilidade em se obter aproximações tão boas quanto fossem necessárias.

Outra contribuição dos antigos babilônios para os atuais manuais didáticos do ensino básico é o método iterativo para o cálculo de raízes quadradas, destacado em Bekken (1994), retomado por Heron, de Alexandria, em cerca de 75 d.C.

Como exemplo, consideremos o cálculo de $\sqrt{6}$. O cálculo de $\sqrt{6}$ remetia ao lado de um quadrado cuja área valia 6 unidades, o que em linguagem algébrica atual corresponderia a escrita e resolução da equação $x^2 = 6$. Uma primeira aproximação, bastante plausível, dos babilônios, seria considerar um retângulo de lados 2 e 3 unidades, onde o valor de $\sqrt{6}$ representaria um segmento de comprimento delimitado no intervalo $2 < \sqrt{6} < 3$.

O próximo passo seria calcular a média aritmética entre esses lados, ou seja, $x = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot (2 + 3) = 2,5$, como um dos lados. O outro lado seria obtido pela razão entre a área e o lado, ou seja: $6/2,5 = 2,4$. Deste modo, $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$. Uma nova aproximação seria realizada, obtendo-se $\sqrt{6} = 2,45$, em notação atual (tabela 1). Uma nova aproximação seria realizada, obtendo-se $\sqrt{6} = 2,449$, em notação atual. O outro lado seria dado por $6/2,45 = 2,449$.

Tabela 1: Cálculo aproximado da raiz quadrada de 6.

Lado	Lado	Área	Aproximação
2	3	6	-
2,5	2,4	6	2
2,45	$6/2,45 = 2,449$	6,00005	2,4
2,4495	$6/2,4495 = 2,44948$	6,0000012	2,449
2,44949	$6/2,44949 = 2,449489$	5,9999988	2,4494
⋮	⋮	⋮	⋮

Neste processo iterativo, a aproximação pode ser continuamente melhorada, até quantas casas decimais forem necessárias. Esta é a essência da operação da aproximação, permitindo a ação de acessar um número irracional para finalidades computacionais, de acordo com o desejo do operar ou com a necessidade do contexto pragmático.

Além disso, o uso da média aritmética², como processo de aproximação, permite expor uma relação com o conceito de raiz quadrada de um número, de modo a ampliar a rede de significações envolvendo a raiz quadrada.

A sequência dos resultados aproximados, que podem ser observados na última coluna da tabela 1, permite compreender a obtenção das sucessivas casas decimais, que corresponde a operação de truncamento, ou seja, a utilização de um número racional como condição de acesso de um número irracional, no mundo pragmático.

Os matemáticos hindus raramente se referiam aos seus predecessores. Dois hindus, Aryabhata (século V d. C.) e Brahmagupta (século VI d. C.), mencionam para PI o valor prático '3' e o bom valor que era conhecido como o valor $\sqrt{10}$, hindu para PI.

Assim como os antigos babilônios e egípcios, os hindus não faziam distinção entre o exato e aproximado em relação aos cálculos numéricos, porém trouxeram contribuição na concepção dos números [...] que os hindus, diferentemente dos gregos, consideravam as raízes irracionais como números. [...] Mas é preciso lembrar que a contribuição hindu nesse caso foi resultado de inocência lógica. Vemos a ausência de distinção cuidadosa, da parte dos matemáticos hindus, entre resultados exatos e inexatos e era natural que não levassem a sério a diferença entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis (BOYER, 1991, p. 160).

Este mote de aproximação se atualiza no novo cenário atual: o contexto da cibernética. Assim, o método iterativo de cálculos de raízes viabiliza a exploração de recursos computacionais, como, por exemplo, as calculadoras e planilhas eletrônicas, que, por sua vez, contribuem para situar as próprias limitações dos meios informáticos, conforme apontam Lima (2000) e Augusto (2009). Das contribuições mais recentes, os números irracionais têm a utilidade de testar os próprios computadores (Lima, 2000), o que põe em relevo as contribuições teóricas da Matemática.

Contrapondo os outros povos, cuja essência remonta aos aspectos pragmáticos, para os antigos gregos, os números racionais eram concebidos num viés teórico, o que atualmente denominamos de Álgebra Geométrica³. O raciocínio:

[...] algébrico em Euclides é expresso totalmente numa forma geométrica. A expressão \sqrt{A} é introduzida como sendo o lado de um quadrado de área A e o produto a.b como sendo a área de um retângulo de um retângulo de lados 'a' e 'b'. [...] Este modo de expressão se deve a teoria das proporções de Eudoxo, que conscientemente tinha rejeitado expressões numéricas para utilizar segmentos de reta e, desta maneira, operava com incomensuráveis num sentido puramente geométrico - a Aritmética limitava-se somente a <<números>> (inteiros) e as suas razões (STRUIK, 1992, p. 92).

Boyer (1991) complementa, relatando que a Álgebra Geométrica lidava com somas, diferenças, produtos e quocientes de segmentos podem ser manipulados por construção utilizando-se de régua não graduada e compasso. Assim: as "raízes quadradas não causam dificuldade na Álgebra Geométrica. Se pudermos achar um segmento 'x' tal que $x^2 = a.b$, simplesmente seguimos o processo indicado nos textos de geometria elementar de hoje" (BOYER, 1991, p. 58). Deste modo, a dicotomia entre

² Três números a, b e c estão em proporção ou média aritmética quando $b = \frac{1}{2}(a+c)$ ou $a - b = b - c$.

³ Bekken (1994) aponta evidências que o termo Álgebra Geométrica foi introduzido pelo historiador H. Zeuthen.

número e grandezas contínuas exigiu um novo método para tratar a Álgebra Babilônica herdada pelos pitagóricos. “[...] Uma Álgebra Geométrica tomava o lugar da antiga Álgebra Aritmética” (BOYER, 1991, p. 54).

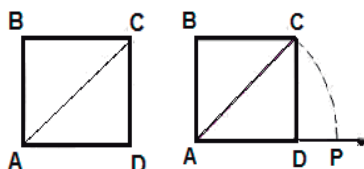
Os pitagóricos concebiam os números irracionais como uma medida geométrica, ou seja, um segmento de reta com um extremo na origem e incomensuráveis ao segmento unitário.

A descoberta mais importante atribuída a Pitágoras foi a dos <<irracionais>> por meio de segmentos de reta incomensuráveis. Esta descoberta pode ter sido o resultado do seu interesse pela média geométrica $a:b = b:c$, que servia como símbolo da Aristocracia. Qual é a média geométrica de ‘1’ e ‘2’, dois símbolos sagrados? Esta questão conduziu ao estudo da razão⁴ entre a diagonal e o lado do quadrado, e descobriu-se que esta razão não poderia ser expressa por <<números>>, isto é, por aqueles números a que chamamos atualmente <<números racionais>> (STRUİK, 1992, p. 80).

Uma situação de fundamental importância para a compreensão dos números irracionais surgiu no estudo da relação entre a diagonal e o lado do quadrado, no século V a.C., momento que os pitagóricos perceberam que estes segmentos não eram comensuráveis. Dois segmentos são ditos *incomensuráveis* se a razão entre estes *não* puder ser expressa como uma razão de números inteiros (com denominador não nulo).

A partir de um quadrado de lado unitário, com origem em A e raio AC, traça-se o arco AC, que encontra a reta em P. Como a diagonal AC e o lado AD são incomensuráveis, o segmento AP não pode ser um número racional (figura 2).

Figura 2 - Visualização de um número irracional no segmento orientado AP.



Numa abordagem mais atual, aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ACD tem-se: $AC^2 = AD^2 + CD^2$. Como $AD = CD = 1$, tem-se: $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ e $AC = \sqrt{2}$. Daí segue que $AP = AC = \sqrt{2}$, que é a abscissa de P.

O problema da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado não sintonizava com a concepção filosófica grega, onde todo número é inteiro ou é composto de uma relação simples entre inteiros. Para tal povo esta situação era indizível ou indenominável, ou seja, impossível de ser expressa com palavras ou através de uma medida. Até então, o que os gregos conseguiam construir eles podiam medir.

Com o advento do problema da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado, os gregos não sabiam o que dizer. Este problema também era inimaginável naquela cultura, pois não podia ser representada numa razão de números inteiros, uma premissa essencial para os pitagóricos.

⁴ Em particular, as razões ou proporções entre números tiveram grande influência na antiga cultura grega (Struik, 1992). A razão denominada média geométrica pode ser dada por $b^2 = a.c$ ou, ainda, por $a:b=b:c$.

Este episódio representou um momento que, num período bem posterior, foi denominado ‘A Crise dos Incomensuráveis’.

Gonçalves e Possani (2010) consideram a hipótese de que os antigos gregos lidavam com razoável naturalidade para a questão da relação entre a medida da diagonal e o lado do quadrado, por meio da Álgebra Geométrica. Os autores apontam evidências, tomando como suporte fontes históricas, ponderando que a atual denominação ‘Crise dos Incomensuráveis’ se situa mais como “[...] uma criação historiográfica do que como um relato fidedigno” (GONÇALVES; POSSANI, 2010, p. 21), relativizando a descoberta da incomensurabilidade como um fator de crise para tal povo.

Independentemente desta questão⁵, os pitagóricos contornaram o impasse gerado por esta situação com uma solução típica da cultura matemática grega da época: a relação entre a diagonal e o lado do quadrado não deveria ser expressa por um número, mas por meio de elementos geométricos.

Mesmo sendo conhecida a falta de documentos da época, Boyer (1991) cita a improvável demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado feita a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras ou do uso das propriedades dos números pares e ímpares, se situando no contexto da Álgebra Geométrica⁶.

Boyer (1991) cita que uma possibilidade da percepção dos antigos gregos da incomensurabilidade poderia ter ocorrido pela:

[...] simples percepção de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono regular menor e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuada indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando a conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional. [...] Não ficaram documentos que resolvam a questão [...] Nesse caso, seria $\sqrt{5}$ e não $\sqrt{2}$ que primeiro revelou a existência de grandezas incomensuráveis, pois a solução da equação $a : x = x : (a - x)$ leva a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como sendo a razão entre o lado de um pentágono regular e a diagonal (BOYER, 1991, p. 54).

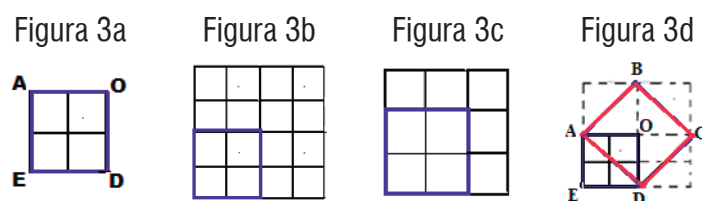
Uma possível referência a esta concepção cultural grega de resolver os problemas por meio da Álgebra Geométrica se encontra em Bekken (1994), ao retratar um trecho dos *Diálogos*, de Platão:

Sócrates desenha um quadrado [figura 3a] que tem dois pés de lado (a área é de quatro pés quadrados, e pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área, isto é, oito pés quadrados. Diz ele: “Mostre-me exatamente o lado deste quadrado. Se não puder dizê-lo com números, mostre-me então o comprimento no desenho”. O escravo propõe em seguida um quadrado com o lado de quatro pés - por conseguinte, o dobro do lado. Quando Sócrates desenha a figura [3] b, o escravo percebe que esta área será quatro vezes maior e corrige a proposta para um quadrado com o lado de três pés. Sócrates desenha a figura [3]c, que mostra que este quadrado é também grande demais, com nove pés quadrados. Finalmente, Sócrates propõe a figura [3]d (BEKKEN, 1994, p. 33-34).

⁵ A abordagem dos autores, no citado artigo, pode se constituir em aporte didático para ilustrar e desenvolver conceitos em cursos de licenciatura de Matemática, e, eventualmente, em alguns níveis mais avançados de desenvolvimento de conhecimento dos números irracionais no Ensino Médio.

⁶ Alguns livros didáticos registram, erroneamente, que esta foi a prova dada pelos antigos gregos. Ainda, os antigos gregos não conheciam a escrita moderna $\sqrt{2}$, efetuando somente operações geométricas entre segmentos que envolviam os *a-logon* (que posteriormente foram denominados de números irracionais).

Figura 3 - Representações do diálogo entre Sócrates e um escravo.



Fonte: Bekken (1994, p. 34)

No relato de Platão, o escravo argumentava que o quadrado deveria ter lado quatro pés e Sócrates desenhou esta resposta (figura 3b), o que revelaria que a área quadruplicaria. Ao perceber que a área tinha aumentado mais do que o solicitado, o escravo corrigiu a resposta, argumentando que o quadrado deveria ter lado três pés (figura 3c), o que ainda não resolvia a questão. Diante do impasse do escravo, Sócrates desenhou a solução do problema (figura 3d).

A narrativa de Sócrates, presente nos diálogos de Platão, ilustra a cultura típica dos gregos clássicos. Ao ser traçada a diagonal, o triângulo ADO resultante, retângulo e isósceles, possui metade da área do quadrado original. A construção proposta é composta de quatro triângulos retângulos e isósceles, equivalentes entre si. Então, a área do quadrado é equivalente ao quádruplo do triângulo ADO, ou seja:

$$\text{Área } ABCD = 4 * \text{Área } ADO = 4 * \frac{1}{2} * \text{Área } AEOD = 2 * \text{Área do quadrado original.}$$

Pode-se interpretar que a ‘Crise dos incomensuráveis’ propiciou uma alternativa, a moda grega, de articulação entre a Aritmética e a Geometria, representando a superação inicial, no âmbito histórico, de uma tensão presente na percepção da existência dos segmentos incomensuráveis pelos pitagóricos.

Bekken (1994) argumenta que esta solução geométrica encaminhada no diálogo entre Sócrates e o escravo de Menon, descrita em Platão, modernamente representa a solução da equação algébrica $x^2 = 2$. E se o foco se centrar na descoberta da medida do lado do quadrado, a situação recairia em um número irracional.

O confinamento dos números irracionais a Geometria promoveu imenso debate em relação à questão: os antigos gregos tinham a noção dos irracionais como números? Diante desta polêmica, Schubring (2005) pontua como negativa a resposta por grande parte dos matemáticos e historiadores atuais, posição que adotamos neste texto.

A crença nos números inteiros impeliu os gregos a ocultar os números irracionais. Este tipo de abordagem da cultura matemática grega gerou o conceito de número:

[...] ligado à Geometria. Somente os números inteiros eram considerados números, enquanto que os outros números eram considerados áreas; particularmente as frações eram tidas como quantidades; e Euclides entendeu que até os números inteiros eram concebidos geometricamente, como segmentos de reta. Naquele tempo a Aritmética grega fazia parte da Geometria⁷ (SCHUBRING, 2005, p. 17, tradução nossa).

⁷ [...] tied to geometry. Only the integers were understood as numbers, at all, while other number areas; in particular fractions, were understood to be quantities; and Euclid understood even the integers geometrically, as segments of straight lines. Arithmetic, at that time, formed an integral part of geometry.

Ao se depararem com a existência dos irracionais, os pitagóricos lhes atribuíram uma representação através da Geometria, contemplando em termos filosóficos os segmentos incomensuráveis como uma imagem concreta de algo inimaginável. Assim:

[...] todo número podia ser expresso por um comprimento, mas existiam comprimentos que não correspondiam a nenhum número. [...] Jamais o [número] irracional teve na Grécia o valor de um número, e os gregos não possuíam símbolo para esta espécie de grandeza (KARLSON, 1961, p. 104).

Desde o surgimento da denominada ‘Crise dos Incomensuráveis’, por muitos séculos os números irracionais permaneceram marginalizados e incompreendidos na Matemática. No entanto, “[...] há um consenso que até o século dezoito não houve um esforço matemático para conceituar de modo satisfatório os números reais” (SCHUBRING, 2005, p. 16).

CONCLUSÕES

O tratamento, regulação e sistematização do conjunto dos números reais e, por consequência, os números irracionais no campo do saber matemático se consolidou há pouco mais de 100 anos. Porém, o mesmo não ocorreu no campo do ensino básico da Matemática, o que demanda alguns esclarecimentos sobre o tema.

A escolha da pesquisa bibliográfica (Oliveira, 2007) situou um levantamento de registros, nos quatro livros de História da Matemática, envolvendo uma série de situações e contextos históricos que podem trazer contribuição a sala de aula de matemática, no tocante ao ensino dos números irracionais.

Os contextos de aproximação dos povos antigos envolveram uma articulação com os temas de base sexagesimal, as frações correspondentes a este sistema e com o conceito de média aritmética, além de situar a operação de truncamento, dentro de uma intenção de permitir trabalhar a noção de aproximação, não mais sendo relegado a tão somente a um conceito intuitivo.

Ainda, o caráter teórico da antiga civilização grega permitiu associar os números irracionais a uma forte representação no contexto da geométrica, como medida de segmentos, o que promove uma abertura para um quadro geométrico, exposto em Bekken (1994) e Boyer (1991), que podem mobilizar diversas linguagens matemáticas mais atuais, no quadro da Aritmética e Álgebra.

Deste modo, a articulação dos dados levantados na pesquisa bibliográfica fomentou uma nova forma, distinta dos dados apresentados nos textos originais, fator que promove uma possibilidade de referência alternativa, sob outro prisma. Esta possibilidade de formas de caminhos enriquece o repertório, por meio da formação de uma rede de significados, conforme expõe Machado (1995).

Em síntese, a análise dos dados delineou um possível percurso para a exploração didática de diversos conhecimentos envolvidos no desenvolvimento do tema dos números irracionais, que poderiam estar presentes numa transposição didática, conceito exposto em Chevallard (1999), nos manuais escolares da escolaridade básica.

Além disso, há uma riqueza de contextos culturais, que articulados com outras disciplinas, podem se constituir num importante movimento de aproximação da Matemática com outras disciplinas da escolaridade básica.

Niven (1984) nos relembra que o tema dos números reais pode ser abordado em diferentes níveis de rigor, onde a “[...] palavra ‘rigor’ é o termo técnico usado em Matemática para indicar o cui-

dado lógico no desenvolvimento de um tópico, em contraste com uma posição mais intuitiva” (p. 7).

Com relação aos números irracionais, cujo aperfeiçoamento matemático levou séculos, a forma usual de apresentação deste tema em muitos dos livros didáticos de ensino básico, sem vínculos com a gênese histórica “[...] causa, no mínimo, um empobrecimento cultural para os nossos alunos, corroborando uma desvalorização do desenvolvimento da Matemática das diferentes épocas de toda humanidade” (PASQUINI, 2007, p. 22).

Brolezzi (1991) pondera sobre a importância de mostrar o caráter dinâmico da Matemática, em que do uso passa-se à descoberta, depois à exploração/desenvolvimento e por fim à definição, que o desenvolvimento histórico pode revelar.

Deste modo, o recurso à História da Matemática em sala de aula pode promover uma visão desta disciplina como um corpo de conhecimentos conectados e acessíveis, gerando interfaces entre tópicos da Matemática, conexões entre a matemática e outras disciplinas ou aplicações.

REFERÊNCIAS

AUGUSTO, A. **Esses engenheiros fantásticos e suas calculadoras maravilhosas**. 2009. Disponível em: <<https://bit.ly/2x7NMgb>>. Acesso em: 18 jan. 2015.

BEKKEN, O. B. **Equações de Ahmes até Abel**. Tradução de José Paulo Quinhões Carneiro. Universidade de Santa Úrsula, 1994.

BROLEZZI, A. C. **A Arte de Contar**: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática. 1991. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da USP, São Paulo.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 9. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHEVALLARD, Y. El Análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches em Didactique dès mathématiques**, Espanha, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CORSETTI, B. A análise documental no contexto da metodologia qualitativa: uma abordagem a partir da experiência de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação da Unisinos. **UNirevista**, v. 1, n. 1, p. 32-46, 2006.

GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, C. **Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis da Grécia Antiga**. *Matemática Universitária*, n. 47, 2010.

GUICHARD, J. P. In : BOUVIER, A. (coord). **Didactique des Mathématiques**. IREM de Lyon Cedic/Nathan, 1986.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. Tradução de Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LIMA, E. L. O que é número PI? In: **Portal MEC**. Geometria, Cap. 3, 2000. p. 126-129. Disponível em: <<https://bit.ly/2NbgSp5>>. Acesso em 06 dez. 2011.

MACHADO, N. J. **A Universidade e a organização do conhecimento: a rede, o tácito, a dádiva**. Estudos Avançados, São Paulo, v. 15, n. 42, 2001.

_____. **Educação: Projetos e Valores**. São Paulo: Escrituras, 2004.

_____. **Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Trad.: Renata Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis, Vozes, 2007.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta de investigação**, 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

POMMER, W. M. Números Irracionais no Ensino Fundamental: Uma análise em livros didáticos. **Anais ... VIII Encontro Paraense De Educação Matemática**, 2011, Pará. Disponível em: <<https://goo.gl/HJpNuh>>.

RIPOLL, C. C. **A Construção dos Números Reais nos Ensinos Fundamental e Médio**. UFRGS, 2001.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century**. France and Germany: Springer, 2005.

SILVA, A. L. V. **Números Reais no Ensino Médio: Identificando e analisando imagens conceituais**, 2011. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SMITH, D. E. **History of Mathematics**. Boston: Ginn and Co., 1923, v.1.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I. **Ensino Médio**. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. 2. ed. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

RECEBIDO EM: 15 mai. 2017

CONCLUÍDO EM: 20 dez. 2017