VIDYA, v. 37, n. 1, p. 239-252, jan./jun., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

O CONCEITO DE CONJUNTO FINITO E INFINITO POR MEIO DE TAREFAS: UMA PROPOSTA À LUZ DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

THE CONCEPT OF FINITE AND INFINITE SET BY MEANS OF TASKS: A PROPOSAL IN THE BASED OF REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION

MARCELE TAVARES MENDES*
RODRIGO CAMARINHO DE OLIVEIRA**
REGINA LUZIA CORIO DE BURIASCO***

RESUMO

Propomo-nos neste artigo[1] discutir tarefas para o ensino de conceitos que dão sustentação ao Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente conceitos de Análise Real. Estabelecemos relações com a abordagem de ensino Educação Matemática Realística, com a intenção de apresentar elementos da prática pedagógica que podem servir para um processo de aprendizagem em um ambiente que pressupõe desenvolver mais do que competências de reprodução e de memorização - competências comumente requeridas em uma aula tradicional de Cálculo ou de Análise Real. O capítulo analisado, *Ad Infinitum,* contempla propriedades do conjunto dos números Reais. As tarefas elaboradas abordam questionamentos sobre o infinito: “Pode um infinito ser maior que outro?”; “Quanto é infinito mais um?”; “Há mais números racionais ou irracionais?”; “O que caracteriza um conjunto infinito?”; “Posso ordenar os elementos de um conjunto infinito?”.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Matemática Realística. Ensino de Análise. Números reais.

ABSTRACT

We propose in this article to discuss tasks for the teaching of concepts that give support to the Differential and Integral Calculus, more specifically concepts of Real Analysis. We have established relationships with the Realistic Mathematics Education (RME) teaching approach, with the intention of presenting elements of pedagogical practice that can serve as a learning process in an environment that involves developing more than competences of reproduction and memorization - competencies commonly Required in a traditional Calculus or Real Analysis class. The analyzed chapter, Ad Infinitum, contemplates properties of the set of Real numbers. The elaborate tasks address questions about the infinity: ‘‘Can one infinite be greater than another?’’; ‘‘How much is infinite plus one?’’; ‘‘Are there more rational or irrational numbers?’’; ‘‘What characterizes an infinite set?’’; ‘‘Can I order the elements of an infinite set?’’

Keywords: *Mathematical Education. Realistic Mathematics Education. Teaching Analysis. Real numbers.*

* Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná. marceletavares@utfpr.edu.br.
** Doutorando do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. rodrigo_camarinho@hotmail.com.
*** Doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Docente da Universidade Estadual de Londrina. reginaburiasco@gmail.com.
[1] Este artigo, parte de um projeto de ensino, apresenta uma releitura do capítulo *Ad Infinitum* do livro Perspectivas da Matemática (FREUDENTHAL, 1975) à luz do referencial teórico constituído.

INTRODUÇÃO

O livro base para a construção da proposta apresentada neste artigo é *Mathematics Observed*[2], escrito por Hans Freudenthal em 1967, composto de sete capítulos que tratam de assuntos matemáticos independentes um do outro. Freudenthal, nesse livro, tem como proposta conduzir o leitor pela matemática, sem a pretensão de torná-lo matemático. Segundo o autor, o leitor pode, ao ler cada um dos capítulos, "penetrar na oficina do trabalho matemático, observá-lo trabalhando e ir embora quando julgar ter visto o suficiente" (FREUDENTHAL, 1967, p.7).

Ao situar o leitor como observador do trabalho matemático, percebe-se que o propósito do livro não era o de promover uma aprendizagem de conhecimentos matemáticos, mas, a partir da leitura de cada um dos capítulos, permitir ao leitor estruturar uma cadeia de pensamentos acerca de um assunto (fenômeno) para refletir sobre conceitos matemáticos (FREUDENTHAL, 1967). Os conceitos matemáticos, estruturas, ideias foram desenvolvidos como ferramentas para organizar fenômenos do mundo físico, social e mental, uma vez que resultaram da resolução de problemas, e a aprendizagem matemática é iniciada a partir de fenômenos significativos para o estudante, que precisa organizá-los (FREUDENTHAL, 1983).

Em vista disso e da intenção de utilizar os fenômenos apresentados no capítulo *Ad Infinitum* no ensino de Análise Real ou de conceitos que dão suporte ao Cálculo Diferencial e Integral - CDI, neste artigo, foram desenvolvidas e discutidas tarefas que podem colocar o estudante para realizar o trabalho de um matemático, tirando-o da posição de observador e de reprodutor de conhecimento, atitude comumente vista em aulas de Análise Real ou de Cálculo Diferencial e Integral em cursos do Ensino Superior. Ao elaborar as tarefas, também foram discutidos conceitos, definições, teoremas que podem ser "revelados" a partir do lidar com elas em um contexto de ensino norteado pelas ideias da Educação Matemática Realística - RME[3], ideias tratadas ao longo do texto.

Hans Freudenthal é considerado o precursor do que hoje é conhecido como Educação Matemática Realística, abordagem de ensino de matemática holandesa. Essa abordagem ainda não estava estabelecida como tal na época da publicação do livro citado, por isso considera-se apropriado fazer o estudo do capítulo à luz de seus princípios. Tomam-se como essenciais as ideias (os princípios) de reinvenção-guiada, fenomenologia didática, modelos emergentes que são consideradas princípios da Educação Matemática Realística. As tarefas propostas e os respectivos encaminhamentos apoiam-se nesses princípios.

O desafio de organizar tarefas matemáticas, em especial para aulas de Cálculo Diferencial e Integral é pertinente aos estudos e pesquisas realizados no interior do GEPEMA[4], do qual os autores desse artigo são integrantes. O GEPEMA tem, em suas pesquisas discutido, potencialidades de tarefas matemáticas para provas escritas em contextos realísticos, assim como suas características para guiar a aprendizagem dos estudantes por meio da reinvenção guiada (PIRES, 2013; FERREIRA; 2013; MENDES, 2014).

[2] Perspectivas da Matemática, traduzido por Fernando C. Lima em 1975, pela Editora Zahar Editores, no Rio de Janeiro.
[3] RME é a sigla em inglês para *Realistic Mathematics Education*. Em português, Educação Matemática Realística.
[4] Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - GEPEMA (http://www.uel.br/grupoestudo/gepema) do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E ALGUNS DE SEUS PRINCÍPIOS BÁSICOS

O projeto Wiskobas[5] na Holanda, no final da década de 60, desenvolveu o que hoje é conhecido como Educação Matemática Realística como uma reação ao Movimento da Matemática Moderna. Baseado nas ideias de Freudenthal a respeito da matemática e de sua aprendizagem, a RME constituiu-se como uma abordagem para o ensino de matemática. Para melhor entender essa abordagem, alguns aspectos serão apresentados a seguir.

Freudenthal toma a matemática como uma atividade humana, mais que isso, considera que as pessoas deveriam aprender as ideias da matemática como uma atividade, no fazer. Diante disso, a principal ideia da RME é que deve ser dada aos estudantes a oportunidade de reinventar a matemática, o que deve ser feito sob a orientação de um professor. Para ele, o conhecimento matemático formal escolar pode ser desenvolvido a partir do conhecimento informal dos estudantes. Dito de outra forma, resolvendo problemas que são reais (no sentido de serem imagináveis) para os estudantes, eles podem utilizar seus conhecimentos informais para reinventar ideias da matemática. Esse tipo de trabalho exige um ambiente interativo no qual estudantes apresentam suas ideias e o professor ajuda na articulação delas buscando construir algum conhecimento matemático.

Na perspectiva da RME, a matemática torna-se um meio de organizar uma situação. Denomina-se *matematização* a atividade de organizar uma situação (realidade) usando ideias e conceitos matemáticos.

A matematização é considerada uma atividade central na Educação Matemática por dois motivos. Primeiro, por familizarem os estudantes a abordarem matematicamente situações cotidianas, atividade desenvolvida pelos matemáticos. E, segundo, por pressupor que iniciar a instrução a partir dos axiomas é uma inversão antididática porque o processo pelo qual os matemáticos chegaram a tais conclusões é exatamente o inverso. Relacionado a isso, recomenda-se que o ensino da matemática seja organizado como um processo de reinvenção guiada, no qual os estudantes podem experimentar um processo similar aos processos pelos quais a matemática foi inventada pelos matemáticos.

De acordo com Gravemeijer (1994), existem três princípios básicos que sustentam a Educação Matemática Realística, são eles: *reinvenção guiada, fenomenologia didática* e *modelos emergentes*. Cada um desses princípios é apresentado a seguir.

Segundo Freudenthal (1971;1973) as ideias matemáticas podem ser mais bem aprendida pelo fazer, e uma maneira de isso acontecer é por meio da reinvenção guiada. Para esse autor, estudantes "deveriam repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que nós sabemos agora" (FREUDENTHAL, 1991, p.48).

Por meio dessa estratégia espera-se que em vez de apresentar as ferramentas e os conceitos matemáticos prontos e acabados, o que Freudenthal (1973; 1991) chamou de inversão antididática, dê-se a oportunidade aos estudantes de "reinventá-los", de acordo com suas necessidades e nível de compreensão, atribuindo-lhes o papel de protagonistas no processo de aprendizagem e, com isso, também responsáveis por ele.

O foco principal da reinvenção guiada não está nos objetos matemáticos, isto é, na matemática pronta e acabada e, sim, na atividade, no realizar. O trabalho do professor se torna indispensável e de extrema importância já que é ele quem prepara o caminho (as aulas) a ser percorrido pelos estudantes

[5] O projeto Wiskobas (que significa "matemática nas escolas primárias") teve como fundadores Fred Goffree, Edu Wijdeveld e, mais tarde, Adrian Treffers. Foi um projeto do CMLW (*Mathematics Curriculum Modernization Committee*) criado, em 1961, para modernizar a educação matemática nas escolas secundárias (FERREIRA, 2013).

durante o reinventar a matemática. Diante desse princípio, alguns componentes[6] fundamentais podem ser destacados: a dinâmica da aula, o professor e o estudante.

De acordo com Ciani (2012), na perspectiva da Educação Matemática Realística, a dinâmica das aulas de matemática é tal que os estudantes lidam com situações das quais participam ativamente na busca de sua resolução; estratégias informais são incentivadas; propõem-se contextos ricos que possam ser matematizados, de modo que os estudantes sejam preparados para utilizar a matemática no lidar com a realidade; a reflexão a respeito das atividades desenvolvidas sempre está presente; os conteúdos não são capítulos estanques, ao resolver uma situação-problema vários conhecimentos e ferramentas matemáticas podem ser necessários; ao estudante é dada a oportunidade de partilhar suas estratégias; propõem-se situações que podem ser resolvidas em diferentes níveis de compreensão.

A dinâmica referida anteriormente visa proporcionar aos estudantes um ambiente no qual eles possam realizar atividades que lhes permitam matematizar e, consequentemente, construir/reinventar a matemática pretendida. Para Gravemeijer (1994), uma maneira de organizá-la é fazê-la por meio do que ele chamou de trajetória imaginada de aprendizagem[7]. Essa trajetória refere-se ao planejamento, que prevê, entre outras coisas, quais caminhos os estudantes poderão percorrer para construir a matemática pretendida, quais possíveis obstáculos podem surgir e o que fazer para superá-los, e o professor tem papel importante tanto no desenvolvimento quanto na utilização das trajetórias.

O professor exerce o papel de *designer* das trajetórias presumidas de aprendizagem. Para isso, considera possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos referentes aos conceitos a serem abordados de maneira a poder oferecer alguma possibilidade para superá-los no guiar e acompanhar o processo de aprendizagem dos estudantes. Utiliza também a história do desenvolvimento de conceitos matemáticos de modo que essas informações o auxiliem a projetar os passos da reinvenção.

De acordo com Gravemeijer (1994), a autoridade do professor como quem valida conhecimento é trocada pela autoridade como guia, na medida em que seleciona as tarefas, inicia e encaminha as discussões das produções e contribuições matemáticas dos estudantes. O estudante também tem seu papel ressaltado em todo o processo, e alguns aspectos são considerados relevantes no que se refere a sua atuação. Hadi (2002), a respeito disso afirma que os estudantes:

- possuem um conjunto diversificado de concepções alternativas (seus preconceitos) de ideias matemáticas que influenciam o aprendizado futuro;
- constroem novos conhecimentos por eles próprios e esses conhecimentos têm sua origem em um conjunto diversificado de experiência; a construção do conhecimento é um processo de mudança que inclui criação, adição, modificação, aperfeiçoamento, reestruturação e rejeição;
- são capazes de compreender e fazer matemática;
- tomados como protagonistas do processo de aprendizagem, também comprometidos e responsáveis por ele, tendo no professor um companheiro[8] de percurso.

Na abordagem da RME, a aprendizagem matemática acontece a partir de fenômenos que são significativos para os estudantes, que precisam ser organizados e que estimulem o processo de aprendizagem, o que Freudenthal chamou de fenomenologia didática.

[6] Nos materiais estudados esses componentes não são apresentados separadamente, mesmo porque eles estão intimamente relacionados e dependem uns dos outros. Optamos por apresentá-los separadamente pelo fato de, em geral, na escola, os processos de ensino e de aprendizagem terem estes como componentes fundamentais.

[7] Do inglês *conjectured learning trajectory*

[8] Aquele que acompanha.

De acordo com Gravemeijer e Doorman (1999), o objetivo da investigação fenomenológica é encontrar situações-problema para as quais uma abordagem específica pode ser generalizada e que sirva de base para o desenvolvimento do processo de matematização.

Uma implicação do princípio da fenomenologia didática, no que se refere ao *designer* instrucional é: aos estudantes deve ser proporcionada uma situação-problema extraída de fenômenos reais e significativos, não necessariamente objetos reais "de verdade" ou situações próximas a eles, mas, como bem disse Gravemeijer e Doorman (1999), que sejam realísticos[9].

O terceiro princípio da RME aqui apresentado é conhecido como *modelos emergentes* (Gravemeijer, 1994). Esse princípio tem papel importante na relação existente entre o conhecimento informal e o formal e na evolução de um para o outro. É fundamental que os estudantes desenvolvam seus próprios modelos enquanto lidam com as tarefas. No início, os estudantes desenvolvem modelos que lhes são familiares. Esses modelos passam por um processo de formalização e generalização, tornando-se, gradualmente, um ente matemático. O mesmo autor denominou essa transição de "*modelo de*" para "*modelo para*".

REVISITANDO O CAPÍTULO *AD INFINITUM*

Para Freudenthal, a matemática desenvolveu-se de tal modo que "expandiu-se não apenas para além de suas fronteiras, mas também através dos limites que separam as suas diferentes divisões internas" (FREUDENTHAL, 1967, traduzido por LIMA, 1975, p.8). Seu livro, *Mathematics Observed* (1967), traz uma seleção de situações que exemplificam a expansão do desenvolvimento da matemática e que podem servir como contextos para a elaboração de materiais para o ensino de CDI. Em particular, o capítulo *Ad Infinitum* trata das propriedades dos Números Reais, contemplando sua infinitude, a sua não enumerabilidade, alguns de seus subconjuntos enumeráveis e suas propriedades.

Neste trabalho, apresentaremos uma releitura do capítulo *Ad Infinitum* do livro em tela à luz do referencial teórico constituído. Sentimo-nos desafiados a reorganizá-lo, na expectativa de abordar as Propriedades dos Números Reais por meio de tarefas que exijam habilidades para além das habilidades de reprodução e memorização, habilidades abrangendo níveis de conexão e de reflexão. O Quadro 1 apresenta algumas das características das habilidades requeridas por meio do lidar com as tarefas em cada um dos níveis citados, esse quadro fundamenta-se em De Lange (1999).

Quadro 1 - Características de habilidades requeridas por uma tarefa

Tarefas de:	Características das habilidades requeridas:
Reprodução	reproduzir conhecimentos frequentemente praticados; utilizar procedimentos rotineiros.
Conexão	além de formulação e solução de problemas e situações, o desenvolvimento de estratégias, a previsão e a verificação de soluções; lidar com linhas curriculares diferentes; utilizar diferentes representações de um mesmo problema.
Reflexão	analisar, interpretar, desenvolver seus próprios modelos e estratégias; apresentar argumentos matemáticos incluindo provas e generalizações.

Fonte: autores.

[9] Realístico é entendido como aquilo que pode ser imaginado pelo estudante.

O lidar com as tarefas propostas configura-se em matematizar conceitos abordados no capítulo *Ad Infinitum* do livro Perspectivas da Matemática (FREUDENTHAL, 1975), ou, ainda, a sistematização das tarefas que seguem constituem as ideias apresentadas no referido capítulo.

AS TAREFAS

A proposta aqui apresentada e discutida é composta por três tarefas chaves, a saber:

- Tarefa 1 - Problema do Hotel;
- Tarefa 2 - Racionais por Cantor;
- Tarefa 3 - Segmentos.

O objetivo com a primeira tarefa é favorecer aos estudantes lidar por meio de situações realísticas com ideias dos conceito de conjunto infinito, de cardinalidade e de enumerabilidade. No Quadro 2 segue um contexto proposto para essa tarefa.

Quadro 2 - Contexto da Tarefa 1- Problema do Hotel.

Em 2010, na África do Sul, aconteceu a Copa do Mundo de Futebol e enfrentaram-se problemas com a acomodação dos turistas, faltaram quartos de hotéis, albergues. Os brasileiros, na tentativa de prevenir o mesmo problema para a Copa de 2014, deram seu famoso “jeitinho” e propuseram a construção de dois hotéis com uma infinidade de quartos numerados 1, 2, 3,...

Fonte: autores.

O contexto da Tarefa 1, apesar de ser baseado na realidade, é fantasioso pela impossibilidade de se construir um hotel com uma infinidade de quartos. Essa tarefa é realística para os estudantes por ser, conforme Gravemeijer, “experimentalmente” real. O enunciado é uma adaptação do conhecido Paradoxo do Hotel de Hilbert, elaborado pelo matemático David Hilbert (1862-1943) na expectativa de aprofundar o seu conhecimento do conceito de infinito.

No Quadro 3 está o enunciado do primeiro item da primeira tarefa elaborada.

Quadro 3 - Primeiro Item da Primeira Tarefa - Problema do Hotel.

a) Explique por que a proposta brasileira pode “resolver” esse problema de acomodação dos turistas durante a Copa do Mundo em 2014?

Fonte: autores.

Com esse item, o professor pode guiar os estudantes na exploração de conjuntos finitos e infinitos, uma vez que o problema ocorrido na África do Sul deveu-se ao fato de o número de acomodações ter sido menor que o número de turistas - conjuntos finitos com cardinalidades diferentes. Já a proposta brasileira supõe a possibilidade de construir hotéis com uma infinidade de quartos. Por tratar-se de um hotel, que comumente tem seus quartos numerados por números naturais, podemos fazer a correspondência de cada quarto com os números naturais - conclusão de que o conjunto dos números naturais tem um número infinito de elementos - e, a partir das observações e considerações realizadas pelos estudantes, o professor encaminha a discussão para os aspectos que sustentam a seguinte definição: “Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, é infinito quando não é vazio e nem existe, seja qual for , uma bijeção $f{:}I_n \rightarrow X, I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$” (LIMA, 2001, p. 5).

No Quadro 4 está o enunciado do segundo item da primeira tarefa elaborada.

Quadro 4 - Segundo Item da Primeira Tarefa - Problema do Hotel.

b) Após a liberação das reservas, em um deles, em pouco tempo, todos os quartos estavam reservados, mas ainda havia uma pessoa precisando de acomodação. O que poderia ser feito para que essa pessoa se hospedasse nesse hotel, sem colocar duas ou mais pessoas em um mesmo quarto ou despejar alguém?

Fonte: autores.

Em busca da solução para esse item o professor pode aproveitar o momento para explorar o fato de a intuição de conjuntos finitos não ser seguida ao se tratar com conjuntos infinitos. Nesse caso, apesar de se ter um hotel com todos os quartos reservados, pede-se para acomodar mais uma pessoa sem que duas ou mais pessoas estejam em um mesmo quarto e que ninguém seja despejado. Essa solução seria impossível no caso de um hotel com um número finito de quartos, uma vez que a cardinalidade do conjunto de turista seria maior que a cardinalidade do conjunto de quartos do hotel, o que impede a existência de uma bijeção entre os conjuntos, isto é, uma relação que tome para cada quarto existente um único turista, sem deixar um turista sem acomodação privativa.

Uma possibilidade para a resolução do item seria reservar o quarto 1 para o hóspede ainda sem reserva e transferir a reserva do quarto 1 para o quarto 2, a reserva do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante, de tal forma que o turista que reservou o quarto, teria garantido a reserva no quarto .

A discussão dessa solução, a partir das ideias dos estudantes, pode conduzir à formalização e à generalização do resultado matemático que expressa a afirmação que infinito mais um ainda é igual ao infinito.

No Quadro 5 está o enunciado do terceiro item da primeira tarefa elaborada.

Quadro 5 - Terceiro Item da Primeira Tarefa - Problema do Hotel.

c) No outro hotel, 500 reservas foram solicitadas de uma vez, no entanto verificou-se que os quartos com números ímpares não estavam disponíveis para reservas e que os quartos numerados com números pares (2,4,6,...) estavam todos reservados. De que forma a gerência poderia acomodar essas pessoas nesse hotel, sem colocar duas ou mais pessoas em um mesmo quarto ou despejar alguém?

Fonte: autores.

É provável que os estudantes nesse item busquem uma estratégia equivalente ao item anterior, de modo que sugiram que a gerência transfira a reserva do quarto 2 para o quarto 1002, a reserva do quarto 4 para o quarto 1004 e assim por diante, deixando 500 quartos (numerados 2, 4, 6, 8, ...,

1000) livres para as novas reservas. Nessa estratégia considerada, o professor pode guiar a discussão no sentido de abordar que conjuntos infinitos distintos (números naturais e números pares naturais) possuem a mesma cardinalidade, que o dobro do infinito ainda é infinito, bijeções entre conjuntos infinitos e seus subconjuntos infinitos.

No Quadro 6 está o enunciado do quinto item da primeira tarefa elaborada.

Quadro 6 - Quarto Item da Primeira Tarefa - Problema do Hotel.

d) Diante das condições mencionadas, qual hotel disponibilizou mais quartos a serem reservados?

Fonte: autores.

A partir da discussão anterior, o desenvolvimento desse item pode conduzir à formalização e à generalização do seguinte resultado: Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção φ: X $\rightarrow$ Y sobre um subconjunto próprio Y $\subset$ X (LIMA, 2001, p.6).

Ao tentar dizer qual hotel tem mais quartos, o estudante se coloca a contar a quantidade de elementos desses conjuntos. É bem verdade que a conclusão será de uma quantidade infinita de quartos em cada hotel e que essas "quantidades" são iguais e já foram trabalhadas nos itens antecedentes.

Nesse item, o professor pode conduzir a discussão para o conceito de enumerabilidade, uma vez que nos dois hotéis foi possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e os quartos a serem ocupados, o que atende a definição de conjuntos enumeráveis apresentada por Freudenthal (1967, p.41), a saber: um conjunto infinito é enumerável "se pode ser posto em correspondência com o conjunto dos números naturais de tal maneira que a cada número natural corresponda um objeto, e vice-versa".

No Quadro 7 está o enunciado do último item da primeira tarefa elaborada.

Quadro 7 - Terceiro Item da Primeira Tarefa - Problema do Hotel.

e) De volta ao item b. Se a gerência, para fazer a mudança de reserva de cada hóspede de um quarto para outro, gasta o tempo de 10s, qual será o tempo que o turista deverá esperar para ter a sua reserva confirmada, de tal forma que todos os outros tenham as suas reservas garantidas?

Fonte: autores.

Conforme mencionado, o enunciado desse item é uma adaptação do Paradoxo[10] do Hotel de Hilbert. O aspecto paradoxal da situação pode ser abordado na discussão com os estudantes por meio desse item, uma vez que o tempo de espera para liberar o quarto seria infinito, haja visto que para se ter o quarto 1 liberado o enésimo quarto deve estar livre para a liberação do quarto .

O objetivo com a segunda tarefa é dar continuidade à discussão de conjuntos enumeráveis, em particular, a enumerabilidade dos racionais. Sendo assim, no Quadro 8 apresentamos o enunciado do primeiro item da segunda tarefa elaborada.

[10] Proposição ou argumento que contraria os princípios básicos e gerais que costumam orientar o pensamento humano (HOUAISS, 2001).

Quadro 8 - Primeiro Item da Segunda Tarefa - Racionais por Cantor.

f) Estabeleça uma relação de quantidade entre o número de elementos do conjunto dos números naturais e dos números racionais, isto é, mostre que há mais naturais que racionais, ou mais racionais que naturais, ou a mesma quantidade de naturais e racionais.

Fonte: autores.

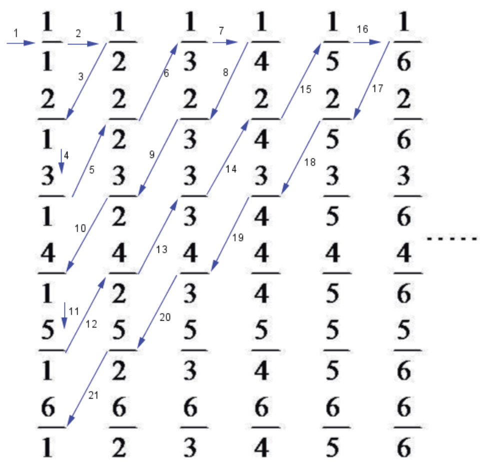
Na tarefa anterior foram explorados conjuntos infinitos em correspondência com o conjunto dos números naturais. Esses conjuntos foram denominados de enumeráveis por existir uma $f: N \rightarrow X$, X conjunto considerado. É bem verdade que, ao considerar essas bijeções, tem-se que e possuem a mesma quantidade de elementos (mesma cardinalidade), já que toda bijeção é injetiva e sobrejetiva.

Com base no exposto, os estudantes poderão ser guiados na exploração da afirmação de que, conforme Freudenthal (1967, p.41) "a infinidade dos números racionais não é maior do que a dos números inteiros", mas igual (no sentido de possuírem a mesma cardinalidade). Essa conclusão também permite explorar o conceito de conjunto infinito apresentado por Lima (2001, p.6), "um conjunto é infinito se, e somente se, ele contém outro conjunto diferente dele mesmo, e estabelecer uma correspondência bijetora com uma de suas partes próprias".

No Quadro 9 está o enunciado do segundo item da segunda tarefa elaborada.

Quadro 9 - Segundo Item da Segunda Tarefa - Racionais por Cantor.

Cantor, em 1874, mostrou que é possível dispor os números Racionais positivos em um arranjo quadrado[1] e associar um único número natural a cada número racional. Explique o esquema representado na figura a seguir que aborda o argumento de Cantor.



Fonte: autores - baseado no modelo de Cantor (1845-1918).

Freudenthal (1967, p.6) apresenta o seguinte argumento para a conclusão de que os racionais estritamente positivos têm a mesma cardinalidade que os naturais:

> É possível escrevê-los, consecutivamente, por debaixo dos números naturais:
>
> | | | | | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
> | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{5}{1}$ | ... |
>
> Este arranjo é perfeitamente sistemático: em primeiro lugar, estão os números *a/b* com $a + b = 2$, depois com $a + b = 3$, depois com $a + b = 4$ etc. , de sorte que, para um valor fixado de n, se disponham as frações *a/b* em que $a + b = n$, atendendo ao valor atribuído a *a*. Ao fazer isso, devemos omitir as frações que podem ser eliminadas. (FREUDENTHAL, 1967, p. 6)

O argumento de Freudenthal explicita a estratégia de Cantor, que organizou o quadrado como uma "matriz quadrada infinita" A_{ij} em que seus elementos obedecem a relação $a_{ij} = \frac{i}{j}$, representando todos os números racionais estritamente positivos e seguiu o arranjo sistemático.

A estratégia de Cantor garante a enumerabilidade dos racionais positivos e isso pode ser provado a partir da construção das bijeções $f_n\colon \mathbb{N} \longrightarrow E_n$, para todo n natural e $E_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\}$, de $\mathbb{Q}_+^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e do resultado de que a reunião de uma família de conjuntos enumeráveis é enumerável (LIMA, 2001, p. 8).

Essa tarefa envolve habilidades de reflexão, uma vez que requer que os estudantes analisem, interpretem, desenvolvam seus próprios modelos e estratégias e apresentem argumentos matemáticos incluindo provas e generalizações. Com tarefas desse nível de habilidade, os estudantes são convidados a matematizar.

Os conjuntos das tarefas desenvolvidas até este ponto do texto sugerem que, apesar de serem infinitos, todos possuem a mesma cardinalidade, isto é, os naturais, os naturais pares e os racionais "são conjuntos com a mesma quantidade de infinitos números", mas será que isso acontece sempre, isto é, conjuntos infinitos têm sempre a mesma cardinalidade? Todos os conjuntos infinitos fazem uma relação bijetora com os números naturais, ou seja, possuem a mesma cardinalidade dos naturais?

A terceira tarefa tem por objetivo trabalhar com conjuntos não enumeráveis, ou seja, com cardinalidade diferente da cardinalidade dos números naturais. No Quadro 10 está apresentado o seu enunciado.

Quadro 10 - Terceira Tarefa - Segmento.

Considere um segmento linear . É possível dizer que o seu conjunto de pontos é enumerável? Justifique.

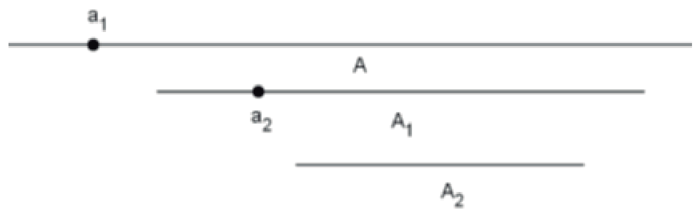
Fonte: autores.

Ao lidar com essa tarefa os estudantes já estarão familiarizados com o conceito de enumerabilidade e poderão no seu desenvolvimento formalizar outros resultados de conjuntos infinitos ainda não abordados, o que vai ao encontro do argumento de Freudenthal de que a instrução não deve se iniciar a partir dos resultados, mas por meio de uma reivenção guiada que favoreça aos estudantes experimentar um processo similar aos processos pelos quais a matemática foi inventada pelos matemáticos.

É provável que os estudantes sugiram que o conjunto dos pontos (do segmento linear) é enumerável. A partir dessa sugestão, deverão ser guiados para a tentativa de enumerar esses pontos sem omitir nenhum. A discussão mostrará que sempre um ponto será esquecido, consequentemente, o conjunto dos pontos do segmento A não é enumerável. Esse resultado pode ser formalizado e generalizado pelo teorema "Todo intervalo não-degenerado é não-enumerável" (LIMA, 2001, p. 18).

Voltando ao ponto esquecido, Freudenthal (1967, p. 42) sugere o seguinte raciocínio para mostrar a não enumerabilidade do conjunto dos pontos do segmento A: os estudantes começam a enumerar os pontos do segmento A. Enquanto estão empenhados nisso, o professor marcará o tal ponto de que não irão lembrar-se.

Figura 1 - Segmentos.



Fonte: Freudenthal (1967, p. 42).

Eles escolhem , então o professor escolhe um subsegmento A_1 de A, que não inclui a_1. Os estudantes escolhem um $a_2 \in A_1$, então o professor escolhe um subsegmento A_2 de A_1, que não inclui a_2, e assim por diante. A cada passo tem-se que A_{n+1} é um subsegmento de A_n e que a_n não pertence a A_n. Os segmentos A_n se extinguem em um ponto c. Esse ponto c foi necessariamente esquecido pelos estudantes.

Como os estudantes podem garantir que não coincide com nenhum dos pontos a_1, a_2, ... por eles enumerados? Isso fica fácil de argumentar uma vez que cada A_n foi escolhido (construído) por não conter a_n. Portanto, por mais que se tente, não é possível enumerar os pontos do segmento A. O desenvolvimento apresentado por Freudenthal aponta para a formalização do seguinte resultado denominado *Teorema dos Intervalos Encaixantes*, "Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo n $\in \mathbb{N}$" (LIMA, 2001, p. 17).

Além desse resultado, pode-se discutir a cardinalidade do conjunto formado pelos pontos do segmento A, uma vez que sua infinidade mostrou-se "maior" que a infinidade dos números naturais, que tem a mesma cardinalidade dos racionais. A discussão dessas cardinalidades e da representação de um intervalo por um segmento direciona a construção do conceito de número irracional, sua representação na reta e formalização do resultado apresentado por Lima (2001, p. 19), "Todo intervalo não-degenerado I contém números racionais e irracionais". Por fim, o professor pode pedir aos estudantes que formalizem os resultados até então obtidos a respeito do conjunto dos números reais.

UMA REFLEXÃO A RESPEITO DAS TAREFAS

Para além da intenção de apresentar tarefas que sirvam para a aprendizagem de conceitos de CDI, espera-se que seja uma recorrente o buscar do professor por tarefas que sirvam para um ensino que favorece ao estudante a oportunidade de matematizar, para reinventar matemática, explorar a intuição e a capacidade de organizar matematicamente situações que sejam "realizáveis", para que guiados por esse professor, os estudantes possam construir conceitos formalizados referentes aos tópicos do curso de Cálculo Diferencial e Integral.

O buscar (no sentido de pesquisar, elaborar, desenvolver) por tarefas está intimamente ligado ao planejamento do professor, das intenções do professor, conforme Van den Heuvel-Panhuizen (2000), sem manter uma perspectiva da trajetória de ensino e de aprendizagem com vistas ao que se almeja, não é possível orientar/guiar a aprendizagem de seus estudantes.

Conforme Mendes (2014, p. 206), "presume-se que o estudante aprenda, por meio de sua produção, não só no fazer, mas progressivamente no entender e no explicar suas escolhas, sendo capaz de corrigi-las assim como às dos colegas". Neste contexto, espera-se fortemente um estudante que se reconhece responsável por sua aprendizagem e um sujeito ativo no seu processo de aprendizagem e de seu colega.

Apesar de acreditar que "boas tarefas" possam favorecer uma possibilidade mais rica de desenvolvimento de uma aula, não tivemos a menor pretensão de supor que elas garantam o sucesso da aprendizagem, mas tivemos a intenção de ressaltar a importância de todo o ambiente, cada elemento com seus devidos papeis assumidos, papel do professor, papel do estudante, importância de um planejamento de tarefas.

Consideramos "boas tarefas" aquelas que refletem objetivos relevantes, de forma que o estudante, desenvolva a partir dela estratégias e procedimentos que abranjam tópicos do assunto da área de matemática em amplitude e profundidade, que possam ser resolvíveis de diferentes formas, favorecendo algum aprendizado a todos os estudantes envolvidos em sua resolução (MENDES, 2014).

Ao pensarmos a disciplina de CDI ou de Análise Real podemos reconhecê-las como disciplinas historicamente organizadas e estruturadas, em que conteúdo encontra seu lugar próprio e estático em suas ementas e programas. Entretanto, em direção contrária, os pressupostos da RME nos permitem reconhecê-las como disciplinas dinâmicas e historicamente construídas a partir de problemas da humanidade. Faz-se necessário o debruçar dos professores sobre os programas das disciplinas, na busca de fazer revelar-se os pontos centrais de cada assunto da disciplina, de repensar a ordem em que cada conceito deva ser construído e sistematizado pelos estudantes.

Neste ambiente, ressaltamos nossa defesa em aulas baseadas em resolução de tarefas, nas quais os estudantes desempenham um papel ativo trabalhando quando possível em grupos e em tarefas não precedidas de exemplos, que sejam desencadeadoras de discussões e que contribuam para elaborações conceituais. O papel do professor, ao invés de sempre fornecer explicações, é incentivá-los a apresentarem e discutirem suas ideias durante as realizações das tarefas propostas, bem como conduzir a sistematização dos conceitos a elas subjacentes (MENDES, TREVISAN, 2016).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde a primeira leitura do capítulo *Ad Infinitum* até o final da reescrita, ficamos surpresos com as constantes descobertas e associações que pudemos fazer do trabalho de Freudenthal, que foi escrito em 1967, e publicações mais recentes. Mais que isso, os assuntos tratados por Freudenthal exigiram de nós, em muitos casos, um aprofundamento teórico muito maior do que imaginávamos. O que, aparentemente, era simples e conhecido, mostrou-se de nível matemático elevado. Essa reescrita enfatiza o papel do professor de buscar, investigar e organizar situações suscetíveis à matematização.

Ao planejar o trabalho, tínhamos em mente desenvolver uma proposta de tarefas para estudantes do Ensino Superior, no entanto, pretendemos também tornar acessível tal assunto a leitores que, porventura, não tenham o conhecimento matemático necessário *a priori* para fazer as sistematizações propostas por Freudenthal em 1967.

No desenvolvimento das tarefas aqui propostas, os estudantes poderão alcançar níveis mais elevados a respeito das características de conjuntos finito e infinito. Para tanto, o papel do professor é o de organizador da reconstrução das ideias e conceitos matemáticos dos estudantes, de tal forma que o conhecimento matemático se faz dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análises e validações estabelecidas pelos envolvidos.

Sem ter a intenção, acabamos por desenvolver tarefas que permitem explorar os principais resultados dos dois primeiros capítulos do livro de Análise aqui citado (LIMA, 2001), o que mostra que um curso de Análise Real pode ir para além de tomar conhecimento de teoremas e aprender a reproduzi-los.

As tarefas exploram a noção de finito e infinito, importantes para a constituição do pensamento matemático, e podem ser uma estratégia para seu aprendizado, uma vez que a noção de infinito gera dificuldades persistentes e difíceis de serem enfrentadas tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior.

Ressaltamos, por fim, que ancoramo-nos na RME por corroborarmos com seus pressupostos e se tratar de uma abordagem utilizada no desenvolvimento, aperfeiçoamento e estudo de materiais instrucionais em matemática que sirvam para apoiar a aprendizagem dos estudantes (KEENE; HALL; DUCA, 2014). Os pressupostos dessa abordagem estão intimamente ligados às atitudes dos professores que desenvolvem/lidam com essas tarefas, de tal forma que não são apresentados no intuito direto de serem fundamentos para a criação de pesquisa, mas para demarcar a perspectiva de ensino e de aprendizagem aqui considerada.

REFERÊNCIAS

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de Matemática**. 2012. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics Observed**. Inglaterra: World University Library, 1967.

FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Perspectivas da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E. **Developing realistic mathematics education**. Utrecht: Utrecht University, 1994.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; DOORMAN, M. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. **Educational Studies in Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 111-129, jan. 1999.

HADI, D. **Effective teacher professional development for the implemetation of Realistic Mathematics Education in Indonesia**. 2002. Thesis, 454p. University of Twente, Enschede, 2002.

KEENE, K; HALL, W; DUCA, A. Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction. **ZDM Mathematics Education**, v.46, p. 561-574, 2014.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Vol. I. Coleção Matemática Universitária (IMPA). Rio de Janeiro, 2001.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em fases como recurso para aprendizagem em aulas de Cálculo**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MENDES, M. T.; TREVISAN, A. L. Modelagem matemática como componente do ambiente educacional para aulas de CDI: relato de uma experiência. In: VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 2016, Londrina. **Anais** do VII EPMEM. Londrina: UEL/UTFPR, v. 1. p. 722-735, 2016.

MORAES, M. A. G.; MENDES, M. T. CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS. In: IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2008, Maringá, PR, **Anais**...Maringá: UEM, 2008.

PIRES, M.N.M. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PARADOXO. In: Houaiss, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Mathematics education in the Netherlands: a guided tour. In: **Freudenthal Institute**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

RECEBIDO EM: 11 abr. 2017.
CONCLUÍDO EM: 13 jun. 2017.