VIDYA, v. 37, n. 2, p. 515-531, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

INVESTIGANDO O ÚLTIMO NÍVEL DA TEORIA DE VAN HIELE COM ALUNOS DE PÓS-GRADUAÇÃO - A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

INVESTIGATING THE LAST LEVEL OF VAN HIELE'S THEORY WITH POSTGRADUATE STUDENTS - THE GENERALIZATION OF THE PYTHAGORAS'S THEOREM

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS*

RESUMO

Neste artigo, apresentam-se resultados de uma pesquisa qualitativa, a qual teve por objetivo investigar como um grupo específico de estudantes de um programa de pós-graduação compreendia os registros natural e figural do Teorema de Pitágoras a partir de seus conhecimentos prévios sobre ele. Para tal, levantou-se a seguinte hipótese: o grupo focal se encontra no nível cinco da Teoria de Van Hiele, ou seja, os alunos têm a conceituação do Teorema de Pitágoras em diversas abordagens geométricas? Ou confundem forma e medida? Os resultados mostraram que os envolvidos, embora enunciassem o referido em linguagem natural, interpretaram de maneira incorreta a forma geométrica do quadrado com a operação aritmética de elevar ao quadrado, ou seja, não há clareza entre formas e medidas. Além disso, ao concluir que há um único registro figural do teorema, entendeu-se que não alcançaram o nível do rigor da teoria para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria.

Palavras-chave: Nível de rigor. Formas e medidas. Registros de Representação Semiótica. Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

In this paper we present the results of a qualitative research, whose objective was to investigate how a specific group of students of a undergraduate program understood the natural and figural registers of the Pythagoras's Theorem from their previous knowledge about it. For this, the following hypothesis was raised: the focus group is at level five of Van Hiele's Theory, that is, do the students have the conceptualization of the Pythagorean Theorem in several geometric approaches? Or do they confuse form and measure? The results showed that those involved, although they enunciated the one in natural language, they interpreted incorrectly the geometric form of the square with the arithmetic operation of raising to the square, that is, there is no clarity between forms and measures. In addition, in concluding that there is a single figural record of the theorem, it was understood that they did not reach the level of rigor of the theory for the development of reasoning in Geometry.

Keywords: *Rigor level. Form and measure. Semiotics Representation Registers. Pythagoras's Theorem.*

* Professor Doutor. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. leivasjc@unifra.br

INTRODUÇÃO

Talvez um dos assuntos de Matemática que mais permanecem na memória das pessoas que passaram pela escola básica seja aquele relacionado ao nome Pitágoras e, em especial, ao famoso teorema que leva o nome desse sábio da antiguidade, muito embora a obra do filósofo e matemático seja muito mais ampla, inclusive com a criação de uma escola denominada pitagórica. Os membros dessa escola, os pitagóricos, atribuíam a descoberta do teorema ao seu grande mestre.

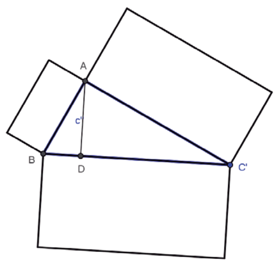
De acordo com Strathern (1998), os babilônios já sabiam que um triângulo retângulo de lados 3 e 4 tem uma hipotenusa de valor 5. No entanto, foi Pitágoras, ou seus seguidores, quem, primeiramente, enunciou a fórmula conhecida até hoje. Posteriormente, com a geometria grega, surgiram novas descobertas, inclusive com as denominadas ternas pitagóricas, ou seja, não somente valendo a relação pitagórica para o triângulo 3,4,5, originalmente pensados pelos babilônios.

Para Struik (1997), enquanto os babilônios consideravam o teorema como resultado de medições, os pitagóricos o concebiam como geométrico abstrato. Outro envolvimento do mesmo se encontra na irracionalidade de números, como , já conhecida dos gregos, advinda do famoso teorema. Para o autor, "o Teorema de Pitágoras era uma relação entre as áreas de três quadrados, e não entre os comprimentos dos três lados." (p. 109).

Entretanto, o aspecto numérico, por si só, não era suficiente e, desde Euclides, a Geometria estava associada ao numérico. Assim, encontra-se em "Os Elementos" a proposição 31 do livro VI: "Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subentendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto." (EUCLIDES, 2009, p. 264).

A seguir, nesse enunciado, há o registro figural e a demonstração correspondente, originada da primeira tradução direta ao português, feita por Irineu Bicudo, e que demonstra a linguagem utilizada à epoca, algumas vezes, de forma bastante truncada para a atualidade. Verifica-se que os aspectos geométricos originais são fortes, tanto no enunciado, quanto na demonstração e que, por certo, levaram a más interpretações e deformações na sua compreensão e uso, como se tentará mostrar no presente artigo.

> Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que a figura sobre a AC é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, BC.



> Fique traçada a perpendicular AD. Como, de fato, no triângulo ABC, foi traçada a perpendicular AD do ângulo reto junto ao A até a base BC, os triângulos ABD, ADC junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo ABC quanto entre si. E, como o ABC é semelhante ao ABD, portanto, como a CB está para a BA, assim a AB para a BD. E, como três retas estão em proporção, como a primeira está para a terceira,

> assim a figura sobre a primeira para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a segunda. Portanto, como a CB está para a BD, assim a figura sobre a CB para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a BA. Pelas mesmas coisas, então, também como a BC para a CD, assim a figura sobre a BC para a sobre a CA. Desse modo, também como a BC para as BD, DC, assim a figura sobre a BC para as semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, AC. Mas a BC é igual à BD, DC; portanto, também a figura sobre a BC é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, AC.
> Portanto, nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subentendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto; o que era preciso provar. (Ibiden,p. 264).

Percebe-se, no enunciado e na demonstração, que a palavra ‘quadrado’ não aparece em nenhum lugar. Assim, justifica-se o presente artigo, que teve por objetivo investigar como um grupo específico de estudantes de um programa de pós-graduação compreende os registros natural e figural do Teorema de Pitágoras a partir de seus conhecimentos prévios sobre o teorema. Para tal, levanta-se a seguinte hipótese: o grupo focal se encontra no nível cinco da Teoria de Van Hiele, ou seja, os alunos têm a conceituação do Teorema de Pitágoras em diversas abordagens geométricas? Ou confundem forma e medida?

Pela experiência profissional do investigador, o mesmo considera que, em geral, estudantes, ao final da Licenciatura em Matemática e na Pós-Graduação, não se encontram no nível cinco da Teoria de Van Hiele, ou seja, os alunos não têm a conceituação do Teorema de Pitágoras em diversas abordagens geométricas e confundem forma e medida expressas no mesmo. O assunto é recorrente, não apenas no Brasil, como indica a investigação feita por Olfos, Guzmán e Estrella (2012), com duas professoras no Chile, atuando num sétimo ano, na qual buscaram investigar a associação existente entre o conhecimento do professor e os saberes que dominam os alunos. Utilizaram o Teorema de Pitágoras na investigação, a qual evidenciou uma aprendizagem muito baixa dos alunos.

Muito embora o ministério da educação daquele país apresente o tratamento do Teorema em aplicações práticas, na resolução de problemas cotidianos, no âmbito de outras disciplinas, as duas professoras investigadas trabalharam com os alunos apenas uma forma de enunciá-lo, que se entende não ser a mais adequada, por proporcionar obstáculos epistemológicos que conduzem os alunos a chegarem, como no caso da pesquisa que se expõe neste artigo, a confundir o quadrado, como resultado numérico da potenciação, no enunciado do teorema, com a figura geométrica quadrado.

Observa-se que isso é apresentado, inclusive, em documento oficial do Chile: “*Desarrollan y analizan procedimientos numéricos para verificar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los catetos es equivalente a la del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera*” (MINEDUC, 2000, p. 144, *apud* Olfos, Guzmán e Estrella, 2012, p. 342).

A investigação realizada concluiu que, “*por un lado, dada la comprensión limitada de las profesoras sobre el teorema de Pitágoras, no les es posible brindar a sus alumnos experiencias matemáticas y fecundas, ni responder adecuadamente a las preguntas que ellos les plantean*”. (Ibiden, p. 357)

Em relação ao documento oficial brasileiro, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), no que diz respeito a conceitos e procedimentos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, para o bloco Espaço e Formas, indicam: “Verificações experimentais, aplicações e demonstrações do teorema de Pitágoras” (p. 89).

Por sua vez, esse documento indica, explicitamente, que:

> atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans, poliminós, fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal pode ser composta/decomposta por outra [...] (p. 123, grifo do autor).

A isso acrescenta-se que não é somente com figuras regulares, como é o caso dos quebra-cabeças geométricos utilizados na presente investigação. No que segue, apresentam-se alguns pressupostos teóricos envolvidos na pesquisa.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Segundo Fiorentini & Lorenzato (2006), dentre algumas tendências em Educação Matemática, apontadas por Batanero et al. (1992), estão geometria, visualização e representação espacial e pensamento geométrico, indicadas 15 vezes em programas internacionais e formação e treinamento de professores, levantados em sete das instituições analisadas.

É premente que, em cursos de formação continuada de professores e nos de ação continuada, a Didática da Matemática receba uma atenção especial, que se possa dar atenção, não somente a conteúdos matemáticos, como é usual ser feito com várias disciplinas de Cálculo, mas aos conteúdos de outras áreas, em especial à Geometria, aliando-os a procedimentos didáticos. Para Almouloud (2007, p. 17), “A didática da matemática é vista como uma ciência que tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favoreçam a sua aquisição pelos alunos”.

D’Amore (2005) indica haver um duplo modo de ver a Didática da Matemática: no primeiro, considera-a como divulgação de ideias em que se fixa atenção no seu ensino e, no segundo, como pesquisa empírica, na qual é fixada a atenção na fase da aprendizagem. Assim, no intuito de proporcionar um ensino e aprendizagem em Geometria, busca-se, neste artigo, dar algum subsídio a partir de uma investigação realizada num curso em nível de pós-graduação cuja meta é aliar conteúdos, metodologias e divulgação de ideias para melhoria de seu ensino e aprendizagem.

Nessa busca, encontram-se fundamentos relevantes na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004), que podem contribuir para a área e para o assunto específico abordado no artigo. Para o autor, há três atividades cognitivas de representações que são próprias da *semiosis*: a formação de representações em um registro semiótico particular, seja para expressar uma representação mental ou para evocar um objeto real; as outras duas se ligam à propriedade fundamental das representações semióticas - a transformação em outras representações que conservam ou todo o conteúdo da representação inicial, ou somente uma parte desse conteúdo. Afirma ele:

> [...] esta transformação não corresponde à mesma atividade cognitiva segundo a transformação seja feita no interior de um mesmo registro ou, ao contrário, que consista na mudança de registro. Denomina-se **tratamento** quando a transformação produz outra representação em um mesmo registro e **conversão**, quando ela produz uma representação em um registro distinto da representação inicial. (p. 42)

Esta investigação deter-se-á na conversão, pois Duval (2004) indica que, para ocorrer aprendizagem de um conceito geométrico, é necessário haver a conversão entre, pelo menos, dois registros (o das figuras e o da língua natural), o que se busca averiguar no presente artigo com os registros em lingua natural e figural do Teorema de Pitágoras, passando pelo simbólico/algébrico. Afirma o autor que "A conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada em um registro, em uma representação desse mesmo objeto, essa mesma situação ou de uma mesma informação em outro registro." (p. 46)

Entende-se que trazer ao professor, quer em sua formação inicial ou em ação continuada, possibilidades didáticas que permitam a retomada de conhecimentos prévios sob abordagens novas ou aprofundamentos das existentes é promissora para o desempenho profissional. De acordo com Lima & Silva (2015, p. 161),

> nem todas as categorias ou dimensões de conhecimentos docentes podem ser desenvolvidas na formação inicial do professor; pelo contrário, muitas serão construídas na prática e em formações continuadas. No entanto, é preciso que, durante a Licenciatura, um conjunto mínimo de conhecimentos docentes seja construído e que essa construção seja realizada por meio de uma abordagem que, ao longo do curso de graduação, forme professores autônomos, ou seja, capazes de aprender sem necessariamente haver alguém os ensinando.

Entende-se que uma forma de averiguar o nível de formação do raciocínio em Geometria e que permite identificar o conhecimento docente pode ser a denominada Teoria de Van Hiele. Seus criadores centraram o trabalho nos diferentes níveis de pensamento em Geometria e o papel do *insight* na sua aprendizagem. Ao que parece, o modelo de Van Hiele combina as estruturas cognitivas e pedagógicas da aprendizagem em Geometria, dando, por isso, algumas sugestões sobre a forma como seu ensino pode ser melhorado.

De acordo com Nasser (1992), o modelo apresenta: nível básico ou de reconhecimento; nível da análise; nível da dedução informal (ou abstração); nível da dedução; nível do rigor. Para essa autora, os níveis são caracterizados pelas diferenças nos objetos do pensamento. Além deles, o modelo apresenta as fases: interrogação/informação; orientação dirigida; explicação; orientação livre; integração. Para ela, os estágios piagetianos de desenvolvimento se relacionam com os níveis de Van Hiele, bem como os níveis de compreensão definidos por Skemp.

Para Skemp (2016), conceito é algo que capacita a classificar determinadas classes como um produto final. Afirma ele que "um conceito requer para sua formação um certo número de experiências que tenham algo em comum" (p. 26). O autor indica que há dois tipos de compreensão: relacional, a qual diz respeito ao saber o que fazer e por quê; instrumental, que significa ter a posse de regras e a capacidade de usá-las.

Assim, entende-se que estabelecer aprendizagem em Geometria, por meio de compreensão relacional, utilizando o modelo de Van Hiele, pode ser um subterfúgio para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem em Geometria. Em Leivas (2012), encontra-se relato de pesquisa realizada em uma oficina sobre o modelo, explorando o Teorema de Pitágoras, em um evento com professores em ação continuada e alunos de Licenciatura em Matemática. Foi comprovado que o registro natural do teorema não foi expressado corretamente pela grande maioria dos indivíduos, mostrando conflitos cognitivos entre medida e forma em Geometria. Por sua vez, os registros figurais concentraram-se na representação única envolvendo quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.

Cargnin, Guerra e Leivas (2016) implementaram uma atividade, em um 5º ano do Ensino Fundamental, como prática de uma disciplina de Geometria, no mestrado profissional, em que o modelo de Van Hiele foi estudado e comprovaram que os alunos classificaram corretamente figuras geométricas, considerando-se as particularidades do público-alvo da pesquisa como maturidade intelectual e conhecimentos prévios. Os resultados obtidos foram melhores do que em outras ocasiões em que o conteúdo foi desenvolvido sem aplicação do modelo, mostrando eficácia da teoria.

O próprio Van Hiele (1990, p. 88) afirma que:

> [...] diz-se que alguém atingiu um certo nível de pensamento quando uma nova ordenação mental, no que diz respeito a determinadas operações, permite aplicá-las a novos objetos. Não se pode chegar a esses níveis com o estudo; no entanto, o professor pode, por uma seleção adequada de tarefas, criar a situação ideal para o aluno alcançar um nível mais elevado de pensamento. Pode-se, também, afirmar que alcançar um nível mais elevado aumenta consideravelmente o potencial do aluno, ao mesmo tempo que torna muito difícil que um estudante volte a cair a um nível inferior de pensamento.

Dessa forma, o modelo é progressivo desde o nível inicial até o final, acreditando-se não ser possível que um estudante avance de um nível a outro sem ter adquirido as habilidades ou compreensões próprias do precedente. O autor, na criação e divulgação de seu modelo, indica que os níveis em Geometria, que aparecem em cursos superiores, depois dos dois primeiros, são muito mais difíceis de se perceber. "Eles não representam uma barreira intransponível em absoluto: é fácil de alcançar". (Ibiden, p. 118). É importante ver o papel que desempenham os últimos níveis do modelo, na construção do sistema lógico geométrico, especialmente para o pretendido no presente artigo.

No que segue, indicam-se os procedimentos metodológicos empregados na pesquisa realizada.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como professor de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, tem-se buscado aliar metodologias e conteúdos no transcorrer da disciplina de Geometria, uma vez que se entende ser, nesse tipo de curso, fundamental aliar teoria e prática, dando subsídios aos professores, que já atuam nos diversos níveis de ensino, e aos futuros, possibilidades de novas ações ou, pelo menos, repensarem a prática utilizada.

No presente trabalho, optou-se por uma pesquisa qualitativa, em um estudo de caso, pela observação direta de cinco estudantes da referida disciplina, sendo quatro mestrandos e um doutorando, os quais serão identificados como M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

Moreira (2011) afirma que a pesquisa qualitativa, em ensino, é relativamente recente, sendo empregada em várias abordagens e que Erickson utiliza o termo interpretativa por ser mais inclusivo. Porém, todas possuem uma característica básica: "as pessoas atribuem a eventos e objetos, em suas ações e interações dentro de um contexto social e na elucidação e exposição desses significados pelos pesquisador." (MOREIRA, 2011, p. 47).

Como tendência metodológica para a investigação em Educação Matemática, ela é apontada por Kilpatrick (1994, apud Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 54) como: "a *aproximação interpretativa*: o investigador introduz-se no ambiente educacional com o propósito de compreender sem julgar/

interferir. Busca interpretar o significado que o ensino tem para os participantes em sala de aula”.

Fiorentini & Lorenzato (2006) indicam que: “Os estudos experimentais caracterizam-se pela realização de ‘experimentos’ que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema”. (p. 104). Além disso, esse tipo de investigação é diferente de outros, pelo fato do investigador reproduzir um fenômeno e observá-lo sob controle, o que indica o procedimento de coleta de dados na presente investigação, na qual o Teorema de Pitágoras é o fenômeno reproduzido, buscando-se sua generalização sob o controle do investigador em cinco episódios, previamente planejados, com o fim de averiguar se os estudantes conseguem identificá-lo em diversos registros figurais associados ao registro natural.

Os cinco episódios, apresentados em registros escritos, foram distribuídos aos participantes, sobre os quais pousou a observação do pesquisador. Reitera-se o indicado por Moraes e Galiazzi (2011, p.95): “a produção escrita é um movimento de constituição de pensamentos próprios, argumentos originais, movimento, que vai dos textos ao contexto, do inconsciente ao consciente.” Os autores defendem que as produções escritas em uma análise textual discursiva “devem ser compostas de descrição, interpretação e argumentação integradora” (p. 97). Assim, na questão 1, pretende-se analisar a descrição do Teorema de Pitágoras; na 2, uma interpretação à luz do registro figural do teorema e nas demais argumentações.

Da análise das produções dos investigados, o pesquisador irá produzir seu texto para a comprovação ou rejeição da hipótese levantada: o grupo focal se encontra no nível cinco da Teoria de Van Hiele, ou seja, os alunos têm a conceituação do Teorema de Pitágoras em diversas abordagens geométricas? Ou confundem forma e medida?

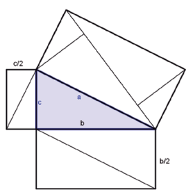
Questão 1- Enuncie o Teorema de Pitágoras.

Questão 2- Faça um registro figural do teorema [uma representação geométrica do enunciado do Teorema].

Questão 3- O registro que você fez é único? Argumente.

Questão 4- A partir do que você enunciou como Teorema de Pitágoras, explique o significado da palavra ‘quadrado’ utilizada. (Relacione com os registros natural e figural feitos!)

Questão 5-



Considerando o registro figural ao lado, você o associaria ao Teorema de Pitágoras? Se sim, qual seria o registro simbólico ou algébrico? E o registro em língua natural? Se não, justifique.

As questões acima foram aplicadas, individualmente, no transcorrer de duas aulas de 4 horas cada, em momentos distintos, em um curso de Geometria, durante o segundo semestre letivo de 2016. As três primeiras questões foram aplicadas no primeiro dia, enquanto as outras duas em retomada na aula seguinte.

A sistemática da disciplina é a seguinte: no cronograma, é planejada a postagem de um texto, de uma única página, versando sobre um tema específico, num formato previamente disponibilizado aos alunos, em um grupo criado exclusivamente para a disciplina, com entrega até 48 horas antes de a aula ocorrer. O professor analisa o que foi postado e, no início da aula destinada ao tema, discute as produções e desenvolve o conteúdo a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes. Isso encontra amparo em D'Ambrosio (1996), para quem um currículo dinâmico reconhece que, nas sociedades modernas, as classes são heterogêneas, reconhecendo-se entre os alunos interesses variados e enorme gama de conhecimentos prévios.

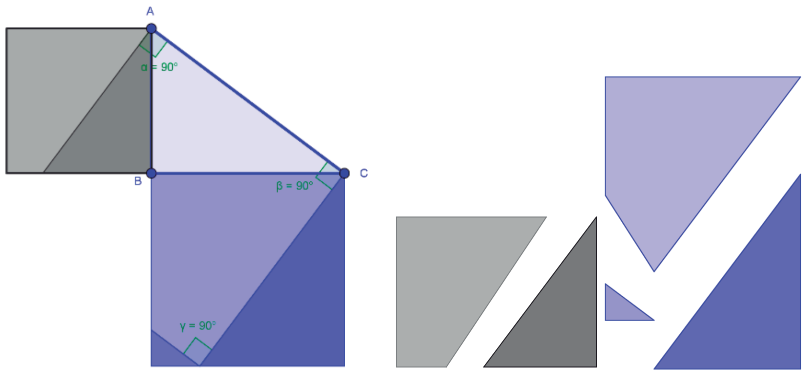
Ribeiro et al. (2006) afirmam que os conhecimentos prévios emergem como fatores de sucesso escolar, cuja relevância é explicada por condicionarem níveis de atenção, percepção, compreensão e organização das novas informações a serem aprendidas. Tal conhecimento prévio constitui, segundo os autores, "andaime sobre o qual se edificam ou constroem as aprendizagens posteriores" (p. 128). Indo mais além, os autores indicam: "Tudo isto explica por que, para alguns autores, as bases sólidas de conhecimentos são mais valorizadas que as estratégias de aprendizagem para a compreensão, organização, memorização e consolidação de novos conhecimentos". (Ibiden, p. 128)

O conteúdo das duas aulas, nas quais se realizou a investigação, teve por tema a Teoria de Van Hiele. Após o desenvolvimento dos princípios da teoria e realização de atividades que ilustravam os cinco níveis, foram utilizados os quebra-cabeças geométricos pitagóricos, conforme Kaleff (1999).

Os participantes seguiram as orientações para as construções do material e, posteriormente, realizaram atividades específicas que conduziam à generalização do Teorema de Pitágoras. Antes de iniciar o primeiro quebra-cabeças, foi solicitado que registrassem respostas às três primeiras questões.

Para montar o primeiro quebra-cabeças, foi necessário tomar um triângulo retângulo qualquer e construir, sobre os seus catetos, regiões quadradas cujas medidas dos lados fossem iguais às dos catetos do triângulo.

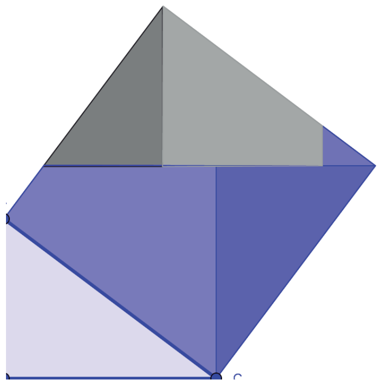
Figura 1 - Quebra-cabeças pitagórico 1.



Fonte: Adaptado de Kaleff (1999, p. 51).

Em seguida, foram recortadas as regiões quadradas, produzindo 5 peças do quebra-cabeças. Após algumas atividades preparatórias, inclusive como poderiam ser utilizadas na escola básica, os estudantes necessitavam construir, usando as 5 peças, uma região quadrada cujo lado tivesse a medida da hipotenusa, como na Figura 2.

Figura 2 - Região quadrada posta sobre a hipotenusa.



Fonte: Adaptado de Kaleff (1999, p. 52).

Antes de retomar as atividades na segunda aula, já com o quebra-cabeças construído previamente, o investigador, individualmente, apresentou a ficha em que os alunos haviam registrado a resposta à primeira questão e solicitou que respondessem à quarta, para, em seguida, à última delas.

A partir desses registros, passou a outras atividades com quebra-cabeças pitagóricos, com os quais os estudantes deveriam obter regiões com formatos de paralelogramos propriamente ditos, trapézios retângulos, triângulos equiláteros, inclusive a partir das peças do tangran original.

A seguir, realizar-se-á a análise das questões propostas.

ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

A escrita, para professores de Matemática, em geral, oferece um grau de dificuldade maior do que para os das humanas. Duval (2014) observa a existência de um fosso entre manipular objetos e o trabalho com figuras, entre figuras e compreensão de propriedades, expressão oral e escrita. Para ele, a "verdadeira questão para o professor é: Como iniciar os alunos nas operações discursivas que ocorrem na linguagem matemática da geometria?" (p. 26)

Partindo dessa consideração do autor, inicia-se descrição do que disseram os estudantes para a primeira questão: enuncie o Teorema de Pitágoras.

M_1: A hipotenusa ao quadrado é igual à *soma dos quadrados dos catetos.*

M_2: O teorema de Pitágoras se aplica a todo triângulo retângulo, onde diz que a soma dos catetos elevado ao quadrado é igual a hipotenusa elevado ao quadrado. (cat.^{2} +cat.^{2} = hip.^{2}).

M_3: Seja T um triângulo retângulo, com lados b, c catetos e a a hipotenusa do triângulo. O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Em símbolos: $a^2=b^2+c^2$.

M_4: Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma do quadrado das medidas dos catetos.

M_5: Basicamente o teorema de Pitágoras se aplica em triângulos retângulos, onde a (hipotenusa)^2 = (cateto1)^2 + (cateto^2).

Como solicitou-se o enunciado, esperava-se que fizessem a escrita matemática própria de um teorema, sem explicações e com linguagem adequada. No entanto, nenhum deles enunciou sucinta e corretamente, sendo que M_4 mais se aproximou. Ao escrever “a soma do quadrado das medidas dos catetos”, o sujeito considerou apenas quadrado como operação aritmética, quando deveria ser “a soma dos quadrados das medidas dos catetos, já que são duas operações. Observa-se, por sua vez, que utilizou corretamente a linguagem ‘medida da hipotenusa’, ‘medida dos catetos’, o que não foi feito pelos demais.

O sujeito M_1 empregou conceitos geométricos e aritméticos indistintamente, ao utilizar a expressão ‘a hipotenusa ao quadrado’, uma vez que hipotenusa é o objeto geométrico e quadrado no sentido da operação aritmética. O sujeito M_2 também apresenta esse conflito cognitivo, reforçado no registro simbólico, além de iniciar, de maneira não formal, um enunciado de teorema, informando onde se aplica.

O investigado M_3 iniciou, de forma precisa, indicando o triângulo retângulo ao qual se aplica o teorema. Indicou símbolos para os catetos e para a hipotenusa. Enunciou, corretamente, ‘o quadrado da medida da hipotenusa’ a exemplo do que fez M_4, porém, deslizou ao registrar ‘a soma dos quadrados dos catetos’, e não a medida dos catetos, o que seria o correto. Esse aluno também fez o registro simbólico, uma vez que designou por letras cada um dos termos do triângulo, muito embora devesse designar por ‘a’, a medida da hipotenusa e não a própria, e da mesma forma para as medidas dos catetos.

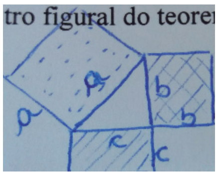
M_5 se distinguiu dos demais, por se afastar dos aspectos matemáticos necessários ao enunciado de uma proposição matemática. Além disso, não distinguiu o objeto geométrico do aritmético.

Até onde se pode perceber, o grupo não apresentou clareza e correção no registro em linguagem natural de um dos teoremas mais importantes, conhecidos e utilizados a partir do seu estudo no Ensino Fundamental por um estudante que chega a um curso de pós-graduação, quando esse formalismo linguístico já deveria estar consolidado, o que vai ao encontro do indicado por Duval (2014) sobre a existência do fosso na manipulação dos objetos, em particular, na compreensão das propriedades de objetos geométricos, fundamentalmente na expressão escrita. Como defendem Moraes e Galiazzi (2011), a respeito da produção escrita em uma produção textual, deve envolver, além da descrição e interpretação, uma argumentação, o que se faz necessário no desempenho profissional do professor de Matemática, em especial o da área de Geometria, disciplina nem sempre com boa aceitação por parte dos alunos.

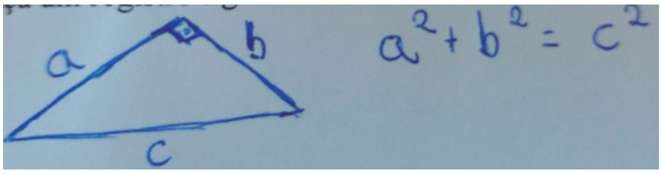
Uma característica do 3º nível da Teoria de Van Hiele (nível da dedução informal ou abstração) é que o indivíduo, ao se encontrar nesse nível, apresenta a percepção de uma definição precisa de um objeto. A partir disso, é possível deduzir que os indivíduos investigados não alcançaram tal nível em relação ao tema. De acordo com o que afirmou o próprio Van Hiele (1990), uma pessoa atinge um certo nível de pensamento quando elabora uma ordenação mental com relação a dadas operações e as aplica a novos objetos. Portanto, as respostas dos sujeitos à primeira questão da pesquisa parece indicar que os mesmos não alcançaram o referido nível.

A segunda questão da pesquisa, aplicada imediatamente à conclusão da primeira e sua entrega ao pesquisador, foi: faça um registro figural do teorema [uma representação geométrica do enunciado do Teorema]. Transcrevem-se, a seguir, os respectivos registros.

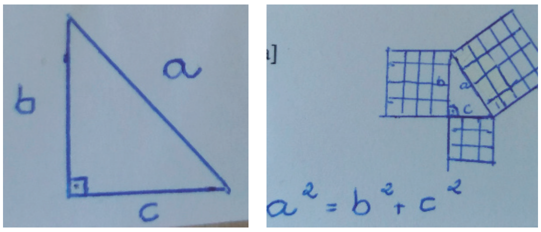
Figura 3 - Representações através de figuras.



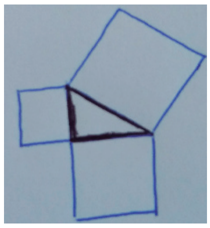
M_1



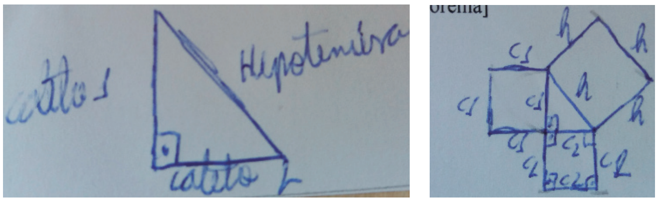
M_2



M_3



M_4



M_5

Fonte: arquivo do pesquisador.

Observa-se, na Figura 3, que, com exceção do aluno M_2, os demais utilizaram a representação figural com quadrados sobrepostos aos lados do triângulo retângulo. M_2 representou apenas o triângulo retângulo identificando com as letras a, b e c os seus lados e indicou a representação com símbolos ou de forma algébrica do Teorema. Por sua vez, M_3, além disso, fez a representação figural com quadrados sobre os lados. M_4, apresentou apenas os quadrados, sem nenhuma indicação simbólica sobre seus lados, enquanto M_5 registrou, em língua natural, os nomes dos lados do triângulo retângulo, coerentemente com a mesma notação utilizada na questão 1 e, ao lado, a figural, com quadrados sobre os lados do triângulo, porém, utilizou outros símbolos para os lados.

Muito embora a análise da questão 1 não tenha indicado um registro em língua natural pertinente, houve uma conversão desse registro para o figural na forma como o Teorema de Pitágoras é usualmente compreendido. Note-se, ainda, que não houve qualquer tipo de identificação ou relação com o quadrado, entendido como o expoente 2 na potenciação e como uma figura geométrica plana.

Entende-se que isso vai corroborar o indicado por Duval (2014) quanto ao fato de que “a linguagem e as dificuldades que suscitam não estão, nem no conhecimento do “vocabulário” geométrico, nem nos conceitos que as palavras significam, mas nas operações de designação que elas pressupõem” (p. 24). Afirma, ainda, que os alunos não se dão conta de que, em Geometria, a diversidade e a complexidade na designação dos objetos, ora se ligam à linguagem, ora à visualização.

Talvez, nesse sentido, se entenda essa confusão quanto a formas e medidas envolvidas no Teorema de Pitágoras como indicado nos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o ensino de Geometria, quando “se confunde seu ensino com o das medidas” (BRASIL, 1998, p. 122).

Considera-se, que no 4º nível da Teoria de Van Hiele (dedução formal), é necessário que os alunos dominem o processo de demonstrações, o reconhecimento de condições necessárias e suficientes, o que a análise da questão 2 indicou não terem alcançado, reforçando o dito anteriormente a respeito do 3º nível. Portanto, a conversão do registro em linguagem natural para o figural não foi considerada satisfatória pelo investigador, em virtude do nível de conhecimentos prévios que eles deveriam transferir.

Para explorar o assunto em apreço, o pesquisador apresentou a terceira questão, evocando a primeira fase da teoria, ou seja, interrogação/informação: o registro que você fez é único? Argumente. Seguem as respostas fornecidas pelos estudantes.

M_1: Poderia ter escrito no registro algébrico. $a^2=b^2+c^2$.

M_2: Não, além do registro figural, o teorema de Tales pode ser expressado algebricamente.

M_3: Não. Pois ao definir o teorema, pode-se fazer de mais de um registro (natural, simbólico, figural, ...).

M_4: Em relação a figura sim, apenas permite que a figura seja ampliada ou reduzida ou ainda rotacionada, mas em todos os casos mantendo suas propriedades.

M_5: Não, eu utilizei um registro figural (desenho), mas pode ser utilizado o registro algébrico.

A análise das respostas transcritas indica que nenhum dos investigados deu algum indício do conhecimento/lembrança de um segundo registro figural do Teorema de Pitágoras, inclusive, indicaram a possibilidade do registro algébrico. Isso configura, para o investigador, a necessidade de que, na Licenciatura em Matemática, sejam proporcionados conhecimentos mínimos, de modo a tornar os futuros professores mais autônomos, como indicaram Lima & Silva (2015), tornando-os capazes de novas aprendizagens. Então, já se percebe indício de não enquadramento no próximo nível da Teoria de Van Hiele.

Aqui percebe-se o tratamento figural em um único registro, ao que Duval denomina compreensão mono-registro, a qual

> apresenta um obstáculo maior: no momento em que sai do contexto no qual se realizou a aprendizagem, a maioria dos alunos se mostra incapaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos e, portanto, ‘eles sabem’. De maneira mais geral, uma compreensão mono-registro é a que não permite nenhuma transferência (2004, p. 75)

No segundo encontro investigativo, o pesquisador devolveu a ficha com a primeira questão e a resposta dada pelo aluno e, seguindo a segunda fase da teoria (orientação dirigida), na qual os alunos devem explorar o tópico de estudos a partir da sequência do material apresentado pelo professor, propôs: a partir do que você enunciou como Teorema de Pitágoras, explique o significado da palavra ‘quadrado’ utilizada. (Relacione com os registros natural e figural feitos!). Há de se considerar que o quebra-cabeças (Figura 1) foi construído, na aula anterior, sendo realizadas atividades com o mesmo no início dessa aula. Transcrevem-se, a seguir, as respostas dos estudantes a essa questão.

M_1: O quadrado da hipotenusa significa que com o quadrado feito nos catetos do triângulo retângulo, consegue-se construir um quadrado na hipotenusa, isto é, com lados iguais a medida da hipotenusa.

M_2: Quadrilátero retangular que possui todos os lados iguais.

M_3: A palavra quadrado refere-se a área do quadrado formado por cada um dos catetos do triângulo.

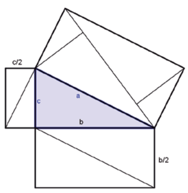
M_4: Quadrado refere-se a área da superfície poligonal quadrada que pode ser construída sob cada lado do triângulo, tomando por base a medida desse lado.

M_5: o quadrado pode e é relacionado com a área de quadrados cujo os lados têm a medida dos lados do triângulo.

Esperava-se que os estudantes entendessem que a área do quadrado, cujo lado tem por medida a da hipotenusa do triângulo retângulo, é igual à soma das áreas dos quadrados, cujos lados têm por medidas as dos catetos. Assim, no registro em linguagem natural ou simbólico, o quadrado tem o sentido numérico, operacional, enquanto, no figural, tem o efeito da área da figura quadrada. Entende-se não ter ocorrido a conversão entre os registros em língua natural e o registro figural. Nota-se que a resposta de M_4 é a que melhor se aproxima do que se considera correto.

Com a análise das quatro questões, foi possível ao investigador comprovar sua hipótese inicial de pesquisa: 'o grupo focal não se encontra no nível cinco da Teoria de Van Hiele, ou seja, os alunos não têm a conceituação do Teorema de Pitágoras em diversas abordagens geométricas e confundem forma e medida expressas no mesmo'. Portanto, não atingiram, até onde se pode concluir, o nível 5 da Teoria de Van Hiele, o rigor.

A última questão investigativa foi planejada em relação à fase denominada orientação livre, bem como à integração, segundo a Teoria de Van Hiele. Na primeira, os alunos foram submetidos a tarefas um pouco mais elaboradas, com várias a serem cumpridas e, na segunda, os alunos deveriam sumarizar o que aprenderam. Isso, no entender do pesquisador, permitiria a retomada do nível 4 da teoria e uma consequente passagem para o seguinte (rigor), sem o que, não seria possível alcançá-lo, segundo a Teoria de Van Hiele. Com isso, o investigador consolidou sua hipótese, uma vez que os estudantes comprovaram desconhecerem o registro figural do Teorema de Pitágoras para além das figuras quadradas.



Considerando o registro figural ao lado, você o associaria ao Teorema de Pitágo-ras? Se sim, qual seria o registro simbólico ou algébrico? E o registro em língua natural? Se não, justifique.

A seguir, apresentam-se os registros fornecidos pelos estudantes a essa quinta questão.

*M_1: Sim, tomando como base dos retângulos os catetos do tri*ângulo e a altura sendo metade *dessa medida, temos que a hipotenusa tem a medida da base do retângulo e a altura é metade desta medida. Então, a soma das áreas dos retângulos formados pelos catetos tem a mesma medida da área do retângulo formado na hipotenusa:* $a.\frac{a}{2} = b.\frac{b}{2} + c.\frac{c}{2}$.

Percebe-se que tal estudante consegue fazer a conversão do registro figural sugerido para o registro em língua natural, além do simbólico algébrico, muito embora não o tenha concluído no formato usual, elevando a medida de cada lado do triângulo retângulo ao quadrado. Nota-se, também, que a mesma intuiu que a medida do lado menor do retângulo sobre a hipotenusa vale a metade da medida da hipotenusa, o que não está correto, uma vez que esse lado corresponde à diagonal do retângulo sobre o menor cateto.

M_2: Sim, ao registro algébrico. A área formada pelo retângulo da hipotenusa é igual a soma das áreas dos retângulos formados pelos catetos.

O aluno fez cálculos algébricos para obter sua conclusão. Nota-se que o mesmo cometeu o mesmo equívoco do aluno anterior, ao considerar o lado menor do retângulo sobre a hipotenusa como sendo a metade da medida dessa, e não como a medida da diagonal do retângulo sobre o cateto menor.

M_3: A área do retângulo formado pela medida da hipotenusa e sua metade é igual a soma das medidas das áreas dos retângulos formados por seus lados e a metade deles.

Esse aluno apresentou um registro em linguagem natural mais adequado, pois utilizou ‘medida da hipotenusa’.

M_4: Pela representação é possível associar sim pois percebemos que a decomposição das áreas dos retângulos construídos sob os catetos, quando reagrupados, resulta na área do retângulo sob a hipotenusa.

Esse aluno foi além, fazendo o registro algébrico correspondente. Percebeu a composição da região quadrada sobre a hipotenusa sendo constituída pelas quatro partes que compõem as regiões quadradas sobre os catetos. Porém, pela discussão sobre o valor do lado menor da primeira, utilizou a metade da medida deste, o que leva a uma relação incorreta.

M_5: Pode ser associado (mesmo utilizando triângulos) onde é observado que a medida da diagonal do retângulo $(b.\frac{b}{2})$ e por associação a altura do retângulo cuja base mede a, a altura será $\frac{a}{2}$, que mede c.

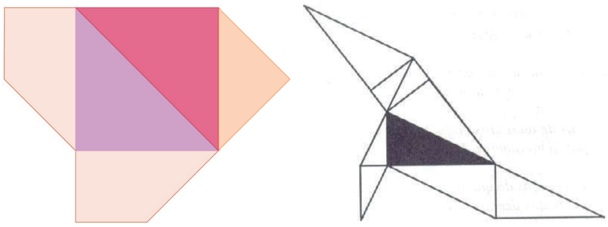
O registro algébrico de M_5 está mal interpretado matematicamente.

Pode-se concluir, a partir dos relatos, que o conceito geométrico do Teorema não está consolidado para esses indivíduos. Acredita-se que esse fato pode ser consequência de uma falta de experiências ocorridas na formação básica e na inicial na Licenciatura, o que vai ao encontro do afirmado por Skemp (2016): ocorreu apenas uma compreensão instrumental, em que as pessoas apenas aplicam algoritmicamente a relação e não há uma compreensão relacional.

A última questão teve o objetivo de introduzir a ampliação do Teorema de Pitágoras, para além daquela representação figural apenas por quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. A partir dessa questão, os estudantes promoveram debate a respeito do registro figural do Teorema, curiosos e, ao mesmo tempo, surpresos em haver outras representações figurais, como observado pelo investigador no transcorrer da atividade realizada.

Com a intenção de ampliar os conhecimentos, tanto prévios, quanto os recentemente adquiridos, foram realizadas outras atividades, com quebra-cabeças, envolvendo representações figurais do Teorema, como é possível visualizar na Figura 4.

Figura 4 - Representações figurais do Teorema de Pitágoras.

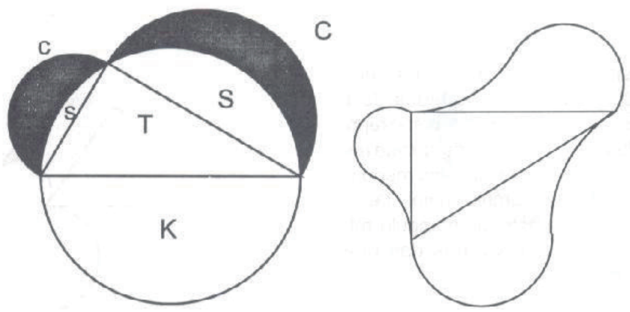


A representação figural da esquerda (Figura 4) indica que a soma das áreas dos trapézios retângulos construídos sobre os catetos do triângulo retângulo é igual à área do trapézio retângulo construído sobre a hipotenusa, enquanto que a da direita trata de paralelogramos.

Duval (2004), ao abordar as figuras geométricas e o discurso matemático, denomina reconfiguração "como a operação que consiste em reorganizar uma ou várias sub figuras diferentes de uma figura dada em outra figura. Uma sub figura pode ser ou uma unidade figural elementar de dimensão 2 ou reagrupamentos de unidades figurais elementares também de dimensão 2" (p. 165). Assim, ao utilizar quebra-cabeças para o tratamento do Teorema de Pitágoras, cada figura construída sobre os catetos é decomposta em unidades figurais elementares, as quais vão se reconfigurar em uma terceira figura. No entanto, essas devem ter a propriedade de serem semelhantes, ou seja, se A, A' e A'' são figuras semelhantes, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo, então a área de A é igual à soma das áreas de A' e A''.

Portanto, os quadrados, os retângulos, os paralelogramos e trapézios construídos sobre os catetos e hipotenusas e constantes no presente artigo devem ser semelhantes. Além desses, outras figuras podem ser construídas, como indica Kaleff (1999), por exemplo, as lunas constantes à esquerda da Figura 5 e as figuras da direita.

Figura 5 - Outras figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Kaleff (1999)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, foram apresentados resultados de uma pesquisa qualitativa realizada com cinco alunos de uma disciplina de Geometria de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e

Matemática, a qual teve por objetivo investigar como esse grupo específico de estudantes compreende os registros natural e figural do Teorema de Pitágoras a partir de seus conhecimentos prévios sobre o teorema.

O investigador tinha a hipótese de que o grupo focal não se encontrava no nível cinco da Teoria de Van Hiele, ou seja, os alunos não tinham a conceituação do Teorema de Pitágoras em diversas abordagens geométricas, bem como confundiam forma e medida em Geometria.

Para isso, foram utilizados quebra-cabeças geométricos, os quais empregavam decomposição de figuras geométricas construídas sobre os catetos de um triângulo retângulo e a posterior reconfiguração na construção de outra figura semelhante sobre a hipotenusa, fundamentados na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Comprovou-se o indicado por esse autor de que uma questão, para o professor, é como trabalhar com seus alunos as operações discursivas, as quais ocorrem em abundância na Geometria. A investigação mostrou que isso é recorrente nos registros feitos por eles, na medida que não enunciaram corretamente o teorema, utilizando a linguagem natural apropriada e confundiram formas em Geometria (região quadrada) com medidas (área). A evidência desse fato decorre, também, da conversão entre o registro em linguagem natural para o registro figural correspondente. Por terem associado ao registro natural apenas o registro figural por regiões quadradas, concluiu-se que os mesmos não estão no nível máximo da teoria de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria.

Em geral, os exemplos citados na literatura, é que um indivíduo não alcança o quinto nível (rigor) por não estabelecer comparativos entre várias axiomáticas, como, por exemplo, entre as Geometrias Não-Euclidianas. Nesta investigação, analisou-se outra possibilidade de verificar o não alcance desse nível do rigor ao constatar que o grupo focal não percebeu possibilidades de outros registros figurais do Teorema de Pitágoras além daquele que sobrepõe quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF. 1998. 148p.

CARGNIN, R. M.; GUERRA, S.H.; LEIVAS, J.C.P. Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. **REVISTA PRÁXIS**, Ano VIII, n. 15, Junho de 2016.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. São Paulo: Papirus, 1996.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizages intelectuales. 2. ed. Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogia. Grupo de Educación Matemática. 2004.

DUVAL, R. Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma Sequência de Atividades em Geometria. Trad. Celia Finck Frandt e Méricles Thadeu Moretti. FRANDT, C. F. e MORETTI, M. T. (org.) **As Contribuições da Teoría das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Ed. Unijui, 2014.

EUCLIDES. **Os elementos**/Euclides; tradução e introdução d Unifjue Irineu Bicudo. - São Paulo: Editora da UNESP, 2009. 600p.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. **Quebra-cabeças Geométricos e Formas Planas**. Niterói, RJ: Eduff, 1999.

LEIVAS, J.C.P. Pitágoras e Van Hiele: uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012.

LIMA, G. L.; SILVA, M. J. F. da. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de Licenciatura em Matemática. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 159-177, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

MORAES, R.; GALIAZZI, M.do C. **Análise textual discursiva**. 2. ed. rev. - Ijuí: Ed. Unijuí, 2011 - 224 p. - (Coleção educação em ciências).

MOREIRA, M.A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NASSER, L. **Using the Van Hiele Theory to improve secondary school geometry in Brasil**. PhD da University of London. University of London. King´s College London. Centre for Educational Studies, 1992.

OLFOS, R.; GUZMAN, I.; ESTRELLA, S. Gestión didáctica en clases y su relación con las decisiones del profesor: el caso del teorema de pitágoras en séptimo grado. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 341-359, abr. 2014 . Disponível em <https://goo.gl/6QBNpQ>. Acesso em 22 out.2016.

RIBEIRO, I.S.; ALMEIDA, L.S.; GOMES, C.. Conhecimentos prévios, sucesso escolar e trajectórias de aprendizagem: do 1º para o 2º ciclo do ensino básico. **Avaliação Psicológica**, 2006, v. 5, n. 2, p. 127-133

SKEMP, R. Compreensão relacional e compreensão instrumental. **Educação e Matemática. Revista da Associação de Professores de Matemática**. n.136, março 2016.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Trad. Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa. 3ª edição. Editora Gradiva, 1997.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión- en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría**. Tesis presentada para la obtención del grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales en la Universidad Real de Utrecht el 4 de julio de 1957. Traducción al español realizada en 1990 por el proyecto de investigación Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo nto deVan Hiele (director Angel Gutiérrez) del Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa del C.I.D.E. (1989-1991).

RECEBIDO EM: 06 mar. 2017.
CONCLUÍDO EM: 20 abr. 2017.