

## O PAPEL DA VISUALIZAÇÃO E DA INTUIÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

### THE ROLE OF VISUALIZATION AND INTUITION IN THE PROCESS OF TEACHING AND LEARNING OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

ERASTO PIEDADE ALONSO\*  
MÁRCIA MARIA FUSARO PINTO\*\*

#### RESUMO

Esse estudo investiga a utilização de recursos visuais e gráficos na aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). A pesquisa é qualitativa, sob perspectiva teórica que considera o papel da visualização e da intuição no processo de ensino e aprendizagem. Participantes são alunos de uma universidade pública que cursaram a disciplina cálculo diferencial e integral, e os instrumentos metodológicos consistem de questionário e atividades com computadores, encerradas com entrevista em grupo. Analisando as respostas dos participantes, organizadas em torno de conceitos evocados e aspectos intuitivos relacionados ao TFC, ressaltamos fatores de conflitos referentes à noção de continuidade, e entre as noções de área sob curvas e integral definida. Referências dos participantes ao TFC reduziram-se durante as atividades com computadores se comparadas às desenvolvidas com lápis e papel; em contraste, a exploração e inter-relações entre representações visuais/gráficas foram intensificadas. Conjecturamos que essas últimas desenvolvem aspectos intuitivos na produção do conhecimento matemático.

**Palavras-chave:** Visualização. Imagem conceitual. Intuição. Teorema Fundamental do Cálculo.

#### ABSTRACT

*Here we investigate the use of visual and graphical resources in the learning of the Fundamental Theorem of Calculus (TFC). The qualitative research adopts a theoretical perspective considering the role of visualization and intuition in the teaching and learning processes. Participants are students of a public university who attended a calculus course. Methodological instruments consist of a questionnaire, activities using computers, and a group interview. Participants' responses are organized around the evoked concepts and the intuitive aspects related to the TFC. As results, we emphasize some conflict factors related to the notion of continuity, and between the notions of area and of definite integrals. Participants' references to the TFC were reduced during the computer activities if compared to those evoked using pencil and paper; while the exploration and interrelationships between visual / graphical representations were intensified. We conjecture that the latter develops intuitive aspects in the production of mathematical knowledge.*

**Keywords:** Visualization. Concept Image. Intuition. Fundamental Theorem of Calculus.

\* Licenciado em matemática. SEEDUC - RJ. E-mail: erasto.alonso@yahoo.com.br.

\*\* Doutora em Educação Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ. E-mail: marciafusaro@gmail.com

## INTRODUÇÃO<sup>1</sup>

As dificuldades no ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral são investigadas em diversas pesquisas no campo da educação matemática. Dentre elas interessam-nos as que têm por foco o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), por seu papel central relacionando os problemas da determinação de tangentes e do cálculo de áreas, matematizados nas noções de diferenciação e integração. Do nosso ponto de vista como alunos e professores, as questões motivadoras para investigá-lo emergem de um desconforto por não nos satisfazermos por completo com sua demonstração e com nossa interpretação das relações visuais e gráficas implícitas em seu enunciado. Dito de outro modo, o TFC remete a uma relação visual que em geral não é explorada: se derivada é a inclinação da reta tangente a uma curva e a integral é a área sob um gráfico, no caso de a função integranda ser positiva, como podemos relacionar essas duas informações em um só resultado como o faz o TFC, e representá-lo graficamente?

A literatura em educação matemática traz resultados da pesquisa sobre o ensino e aprendizagem desse tema em nosso país (ver, por exemplo, SEGADAS, 1998; SCUCUGLIA, 2006; PICONE, 2007; ANACLETO, 2007; ANDERSEN, 2011; GRANDE, 2013) e seus desdobramentos, sugerindo questões ainda em aberto. De um modo geral, o objeto de tais estudos é o ensino e aprendizagem da função conhecida como função área, e as relações entre primitiva e derivada no cálculo de área sob curvas. Deixam em aberto investigações sobre o enunciado que a maioria dos livros-texto de cálculo se refere como o da primeira parte do TFC, que explicita um processo para o cálculo de uma integral definida, no caso da função a ser integrada ser contínua no intervalo de integração. Vale acrescentar que tais pesquisas no país, iniciadas por Segadas (1998), evidenciam ganhos na aprendizagem em abordagens de ensino alternativas que articulam rigor e intuição, como expresso em Reis (2001). Ao buscar alternativas visuais/gráficas para abordar e demonstrar o TFC encontramos as propostas em Tall, (1991a) e Tall, (1991b) (ver, ainda, TALL, 2013), que são incorporadas à nossa pesquisa.

Esse artigo apresenta resultados de uma investigação sobre as contribuições que uma proposta de abordagem visual/gráfica ao TFC pode trazer para o entendimento do teorema. O diálogo com a literatura de pesquisa ao planejá-la é apresentado na primeira seção deste texto. Em seguida, trazemos elementos sobre a preparação de um questionário e de uma oficina com computadores para possibilitar exploração de representações visuais/gráficas. Essa discussão é precedida pela apresentação de nossa perspectiva teórica sobre ensino e aprendizagem (ver TALL e VINNER, 1981; TALL, 1991a; VINNER, 1991; TALL, 2013), adotada também em Segadas (1998), e que é fonte teórica de elaboração do projeto e da análise do material empírico produzido. As noções em Tall (1991b) e Fischbein (1994) referenciam nossa perspectiva sobre inter-relações entre rigor e intuição. Um recorte da análise do material empírico produzido sustenta os resultados e as considerações finais, apresentados na última seção desse texto.

## APORTES TEÓRICOS

### Um diálogo com a literatura de pesquisa

Dentre as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do TFC desenvolvidas no país retomamos os trabalhos de Segadas (1998), Anacleto (2007), Grande (2013), Andersen (2011), Picone (2007),

<sup>1</sup> Este artigo traz resultados de uma pesquisa realizada por seus autores, motivada por questionamentos e interesses do primeiro autor e sob a supervisão e orientação do segundo autor, aluno e docente, respectivamente, do programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, UFRJ.

Campos (2007), reconstruindo a proposição de nossa própria pesquisa e evidenciando direções de nossa contribuição.

Andersen (2011) investigou *quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apoiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel quanto pelo software Winplot2* (ANDERSEN, 2011, p. 17), ao explorar a expressão da função área  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Os participantes já haviam trabalhado assuntos como limite e derivada, mas não o tema integral. Em sua análise, a pesquisadora destaca dificuldades dos participantes em distinguir as funções derivada  $f$  e sua primitiva  $F$ , principalmente ao avaliar qualitativamente a função  $F$ . Em contraste, muitos conjecturaram que, se  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , então  $F'(x) = f(x)$ ; ou seja, que integração e derivação são operações inversas. Como em Segadas (1998), que investigou os aspectos formais relacionados à compreensão do TFC, tais como as definições e teoremas a ele relacionados, os estudantes não perceberam a necessidade de a função  $f$  ser contínua em seu enunciado. Segadas (1998), referencia-se nas noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual* (Tall e Vinner, 1981) e destaca o papel do conceito de função no desenvolvimento de outros objetos matemáticos, tais como limite, continuidade e inclinação de uma reta tangente. Dentre as dificuldades envolvidas no TFC, Segadas (1998) identifica as relações entre as diferentes representações de função que coexistem em imagens conceituais associadas; em particular, a relação existente entre suas representações gráfica e analítica. Sob esta mesma perspectiva teórica, a proposta em nossa pesquisa é a de conhecer tais relações que os participantes estabelecem entre as diversas representações de funções ao explorar o TFC bem como os conhecimentos eles evocam sobre a noção de continuidade.

Já Grande (2013) referencia-se na didática francesa e elabora uma sequência didática para o estudo do TFC. Abordou as relações entre derivação e integração utilizando o software GeoGebra, referenciando-se em princípios da intuição, que se revelou como “essencial na organização das ideias e conceitos desenvolvidos que posteriormente foram refinados com o formalismo matemático agregado com o rigor necessário.” (GRANDE, 2013, p. 291). Sua pesquisa, qualitativa, envolve alunos de um curso de Tecnologia em uma universidade pública. Retoma o papel da visualização no ensino do Cálculo (TALL, 1991b) e as inter-relações com a intuição e o rigor, referenciando-se em Poincaré (1995) e Fischbein (1994). Este último, articulado a Tall (1991a) e Reis (2001), fundamentam nossas reflexões sobre aspectos intuitivos envolvidos nas respostas dos alunos ao explorar aspectos visuais e gráficos do TFC. Grande (2013) conclui que a interação com o *software* permitiu “que os componentes intuitivo, algorítmico e formal fossem inter-relacionados e confrontados” (ibid, p. 290), destacando melhoria

[...] apresentada pelos alunos na compreensão do conceito de integral por meio de acumulação, desprendendo-se da interpretação geométrica de integral como sinônimo de área, e conseqüentemente sua relação com a questão de variação ligada ao conceito de derivada, fato que permite inferir que esse tipo de abordagem colabora na compreensão da essência do TFC. (ibid, p. 282)

Scucuglia (2006) também investiga o uso de tecnologias para responder “como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?” (p. 19). Adota a perspectiva epistemológica Seres-Humanos-com-Mídias, realizando experimentos de ensino envolvendo estudantes ingressantes na graduação em matemática de uma universidade pública, focando, a “questão da prova em matemática com informática e, principalmente, à questão da experimentação

com tecnologias e dedução.” (ibid, p. 19). Duplas de participantes realizaram duas sessões de experimentos de aproximadamente duas horas cada, que foram filmadas, explorando noções intuitivas e notações simplificadas, antes que fosse usada a simbologia padronizada pela Matemática Acadêmica. Para o pesquisador, essa abordagem possibilitou o engajamento gradativo das estudantes em “discussões matemáticas dedutivas” a partir dos resultados obtidos “experimentalmente” com as atividades propostas. Scucuglia (2006) destaca que a visualização pode atuar como auxílio ao processo de pensamento matemático, evidenciando a formulação de inferências, conjecturas e justificativas. Por outro lado, em referência ao uso de representações visuais/gráficas, Segadas (1998) constata em sua pesquisa que a maioria dos participantes apresentou dificuldades ao solucionar problemas em que uma simples visualização de um gráfico evitaria o uso de longos algoritmos. Até mesmo os alunos que evocaram uma imagem visual relacionada ao conceito de integral definida como área, não a utilizaram na resolução do cálculo de  $\int_{-1}^1 |x| dx$ , por exemplo, preferindo desenvolvê-lo de maneira algébrica, algorítmica. De modo geral, os alunos apresentaram como ferramentas para resolução de problemas que envolvem de maneira implícita ou explícita a utilização do TFC apenas procedimentos algorítmicos memorizáveis, tais como técnicas de derivação e integração, utilizando a representação algébrica. Segadas (1998) destaca que imagens gráficas têm sido utilizadas para ilustrar conceitos, em exemplos de casos em que uma dada definição aplica-se, ou não. Pouco uso se faz delas na resolução de problemas e na compreensão efetiva de uma definição ou teorema.

Dentre os desdobramentos destas pesquisas, destacamos investigar o uso de imagens visuais geométricas para abordar o TFC, de forma integradora. Segadas (1998) relacionou a predominância do uso de representações visuais como ilustração a dificuldades na apresentação de gráficos, no ensino de matemática, de forma estática e não dinâmica. Estes resultados reforçam nossa intenção de investigar a utilização de software de geometria dinâmica para representar conceitos e suas relações ao trabalhar o TFC.

O uso de representações múltiplas é o tema em Campos (2007) e em Picone (2007), ambos referenciados na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Campos (2007) analisa os livros didáticos *Curso de Análise*, escrito por E. L. Lima em 1982; *Um Curso de Cálculo* de H. L. Guidorizzi, de 2001; *Cálculo* escrito em 2012 por J. Stewart; *Um Curso Universitário*, de E. E. Moise, que data de 1970. Conclui que eles não discutem explicitamente a questão referente à inter-relação entre derivada e integral, que é fundamental para o entendimento do TFC. Em seus prefácios, alguns destes autores reiteram a importância da representação gráfica na abordagem dos conceitos, sem, entretanto, explorá-la de forma incisiva no desenvolvimento.

Já Picone (2007) investiga os registros de representação semiótica mobilizados por professores de Cálculo de oito instituições de ensino superior no ensino do TFC, bem como a importância atribuída por eles à coordenação desses registros, explorando a visualização do TFC por meio da representação gráfica. Referencia-se em Segadas (1998) e propõe uma investigação em duas etapas, utilizando questionários e entrevista. Em seus resultados, Picone (2007) reitera que os participantes consideram pertinente a coordenação simultânea dos registros envolvidos; sem no entanto tornar efetiva sua importância no ensino do TFC. Ao analisarem uma situação que explora a conexão entre a derivada e a integral graficamente, alguns afirmam que não costumam propor esse tipo de atividade aos seus alunos. Nesse caso, as justificativas foram diversas; embora em nenhum momento tenham apontado para a não importância de serem propostas. A autora conclui que mesmo não se negando a utilizar o TFC como uma ferramenta, esta não é explorada graficamente pelos professores entrevistados. Embora alguns professores sugiram uma visão do TFC “intuitiva” pre-

cedendo à demonstração e formalização, para explorar inicialmente propriedades entre os gráficos das funções primitiva e derivada.

Anacleto (2007) teve por objetivo investigar os conhecimentos mobilizados por alunos ao estudarem o TFC. Retoma Segadas (1998) e utiliza um questionário respondido em duplas por alunos que cursavam cálculo, para analisar se a mobilização desses conceitos foi adequada na resolução de questões específicas em que sua aplicação era necessária. A análise dos dados, referenciada em Douady (1987, apud ANACLETO, 2007) e em Segadas (1998), confirma resultados de que a maioria dos alunos encontra dificuldades em solucionar problemas com uma simples visualização de gráficos, optando por desenvolver longos algoritmos. A maioria dos alunos usa conhecimentos anteriores como ferramenta para o cálculo de primitivas e de integrais definidas; porém nem sempre utilizam o TFC corretamente, para calcular essa última. A maioria reconhece a derivação e a integração como operações inversas, “porém foram identificadas dificuldades na visualização e interpretação geométrica dessas operações” (ANACLETO, 2007, p. 117). Tais obstáculos relacionam-se a uma mobilização, parcial, das noções de derivada, integral e continuidade. Podemos explicá-la em termos de hábitos de não focar os aspectos conceituais de um teorema, memorizando-o como um algoritmo.

Referência para os estudos mencionados, a pesquisa em Segadas (1998) foi planejada em três fases, precedidas por um estudo piloto. O número de participantes na primeira fase foi de 148 alunos calouros em uma universidade pública, que responderam a um questionário. A primeira parte do questionário apresentava questões sobre as principais estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem questões relacionadas ao TFC e sobre a continuidade de uma função; a segunda parte investigava as crenças dos alunos sobre possibilidades de generalizações em Matemática, explorando suas concepções sobre o processo de prova e demonstração do TFC. Após a análise das respostas dos alunos, 26 participantes foram selecionados para entrevistas individuais; dentre os quais 17 foram escolhidos para desenvolver atividades utilizando o software *Graphic Calculus* (Tall, 1986). A pesquisadora investigou como os alunos visualizavam alguns conceitos relacionados ao TFC, tais como diferenciação e integração, a relação entre estes eles, e a hipótese sobre a continuidade da função a ser integrada em seu enunciado.

Além dos resultados já discutidos, autora destacou ainda as dificuldades na compreensão e resolução de questões que envolvem não somente o TFC, mas também questões correlatas tais como integração e diferenciação de uma função, continuidade e diferenciabilidade. Tais dificuldades estão relacionadas à compreensão e à representação gráfica da função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  bem como ao significado de suas variáveis  $x$  e  $t$  e à relação entre continuidade e diferenciabilidade de funções, havendo conflitos entre a definição formal e a imagem conceitual evocada pelos alunos em referência a essa questão. Nem todos os alunos familiarizados com as definições conceituais de diferenciação e integração visualizaram os gráficos das funções  $f$  e  $F$ , em que  $F' = f$ . Uma dificuldade maior do que o contrário é a construção do gráfico da função primitiva  $F$  a partir da sua função derivada  $f$ . Para a autora, tais conceitos não são evidentes para os estudantes, pois eles fazem uso de imagens que contêm aspectos parciais das definições ou são evocadas como exemplos particulares; em uma visão fragmentada que parece intervir consideravelmente na visualização geométrica e na demonstração do TFC.

Dentre os desdobramentos possíveis destas pesquisas interessa-nos investigar as contribuições do uso de imagens visuais e gráficas, no ensino e aprendizagem do TFC, integradas à demonstração de seu enunciado, utilizando lápis e papel e com computadores, para possibilitar explorações dinâmicas. Por estar sendo menos investigada, exploramos a primeira parte do TFC, geralmente enunciada nos livros de cálculo como

Se uma função  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Para desenvolvimento do estudo adotamos a perspectiva sobre ensino e aprendizagem de conceitos e as noções de *imagem conceitual* e de *definição conceitual*, elaboradas em Tall e Vinner (1981) e desenvolvidas em outros textos (ver, por exemplo, Vinner, 1991; Tall, 2013), por seu potencial em explicar os processos envolvidos na aprendizagem de conceitos matemáticos no ensino superior. Sua concepção teórica não dissocia visualização, intuição e rigor, sendo adequada a esta pesquisa.

### **Imagem conceitual e definição conceitual**

Para compreender os processos mentais envolvidos na aprendizagem do conhecimento matemático, Tall e Vinner (1981) ressaltam que “as realidades psicológicas são diferentes” (p. 1), de pessoa para pessoa, pois cada um de nós desenvolve estruturas cognitivas diferentes relacionadas aos conceitos que nos são apresentados. Elas são diversas porque nossas experiências individuais o são; assim, a definição de um conceito pode produzir em “uma variedade de imagens mentais pessoais quando um conceito é evocado” (p. 1). Para contemplar tal realidade psicológica do indivíduo, os autores trazem um entendimento que

*a estrutura cognitiva total que dá significado ao conceito é muito maior do que a evocação de um único símbolo. É mais do que qualquer imagem mental, seja ela pictórica, simbólica ou de outra forma. (ibid, p. 2)*

Durante os processos mentais de recordação e manipulação de um conceito, muitos outros processos associados são colocados em jogo, afetando, consciente e inconscientemente, o seu significado e uso. Assim, Tall e Vinner (1981) propõem o uso do termo *imagem conceitual* “para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados a ele.” (p. 2). Destacam que “ela [a imagem conceitual] é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, modificando-se à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.” (ibid, p. 2). Eles denominam a parte da imagem conceitual que é ativada em um momento específico como *imagem conceitual evocada*.

Ainda referindo-se a um conceito, para Tall e Vinner (1981), a *definição conceitual* (se ela existir para o indivíduo), é uma noção completamente diferente. Eles propõem denominar por definição conceitual “[...] a forma de palavras que o estudante usa para sua própria explicação de sua imagem conceitual (evocada)” (p. 2). Para os autores

*tanto a definição conceitual que é apresentada ao aluno quanto a que é construída por ele mesmo podem variar com o tempo. Desta forma, uma definição conceitual pessoal pode diferir de uma definição conceitual formal, sendo esta última uma definição conceitual que é aceita pela comunidade matemática em geral. (TALL e VINNER, 1981, p. 2)*

Vale observar que a imagem conceitual não se desenvolve de modo homogêneo, linear e coerente, podendo conter aspectos conflitantes ou inconsistentes. Muitas vezes estes aspectos só são percebidos por um indivíduo como incoerentes se evocados simultaneamente em uma situação particular. Estes aspectos são denominados pelos autores por *fator de conflito potencial*, e são importantes na análise que trazemos neste artigo.

Ao adotarmos uma perspectiva que considera o aprender um conceito apresentado por sua definição como o desenvolver uma imagem conceitual relacionada, incluindo visualizações, natural estamos reconhecendo uma relação mútua, como em Reis (2001), entre o rigor matemático de uma definição conceitual e o que denominamos intuição, relacionada à imagem conceitual associada.

### **Intuição, visualização e rigor**

Não há como abordar o tema intuição na educação matemática sem retomarmos as reflexões de Efraim Fischbein, dado o alto número de citações à sua produção, quando se trata deste assunto. Fischbein (1994) chama a atenção para a importância de os alunos compreenderem que a matemática é, essencialmente, uma atividade humana, ou seja, inventada por seres humanos, cujo processo de criação “implica em momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação” (ibid, p. 231) e não apenas em uma construção sequencialmente formal e dedutiva. Fischbein (1994) descreve a matemática como uma atividade humana como a interação de três componentes básicos: “o formal, o algorítmico e o intuitivo.” (ibid, p. 231). O aspecto formal refere-se aos axiomas, definições, teoremas e provas, os quais, segundo o autor, “têm de penetrar como componentes ativos no processo de raciocínio” (ibid, p. 232), pois eles têm que ser inventados ou aprendidos, organizados, verificados e usados ativamente.

Sobre o componente algorítmico, ele chama a atenção para o fato de que podemos entender um certo sistema de conceitos sem querer dizer que espontaneamente tenhamos nos tornado capazes de usá-los na resolução de uma classe correspondente de problemas; pois precisamos desenvolver habilidades e não só de compreensão. Tais habilidades são adquiridas em práticas, treinamento sistemático.

O terceiro componente para a produção do conhecimento matemático, no entender de Fischbein (1994), é a intuição. Ele a subdivide em três partes: cognição intuitiva, compreensão intuitiva, solução intuitiva. O autor entende por cognição intuitiva um tipo de cognição que é aceita diretamente, sem a sensação de que seja necessário qualquer tipo de justificção. Ele complementa dizendo que uma cognição intuitiva é “caracterizada, em primeiro lugar, por (aparente) auto-evidência.” Fischbein (1994) considera como auto-evidentes, declarações como: “O todo é maior do que qualquer das suas partes”; “Através de um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma, e apenas uma, reta paralela a essa.”; “O caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta. (ibid, p. 23). Para Fischbein (1994), um entendimento cognitivo, aparentemente auto-evidente e intuitivamente aceito, terá um impacto coercitivo sobre as interpretações e estratégias de raciocínio. Suas reflexões sobre como as figuras geométricas, e as imagens em geral, ocupam uma posição especial na atividade de pensar ressaltam a importância, no ensino de matemática, dos três aspectos fundamentais da matemática: o formal, o algorítmico, e o intuitivo, e como a interação entre eles é relevante, cognitivamente.

O argumento em Tall (1991b) sobre a importância da intuição preceder o rigor em matemática, e sobre a visualização, é construído retomando que

*em pesquisa matemática, prova é a última etapa do processo. Antes que possa haver prova, deve haver uma ideia de que os teoremas são dignos de prova, ou que teoremas podem ser verdadeiros. Esta fase exploratória do pensamento matemático beneficia a construção de um quadro geral de relações que pode ser beneficiado por uma visualização. Não é por acaso que, quando achamos que entendemos algo, dizemos ‘ah, entendi!’<sup>2</sup> (TALL, 1991b, p. 2)*

Por outro lado, Tall considera que as “figuras podem, muitas vezes, sugerir falsos teoremas.” (ibid, p. 3); e portanto não podemos prescindir do rigor. Seu entendimento sobre o conceito de intuição e sobre como ela se concretiza como pensamento parece-nos, de certo modo, estar em oposição ao pensamento lógico dedutivo matemático:

*a existência de diferentes modos de pensamento sugere uma distinção entre os processos de pensamento intuitivo e o pensamento lógico, que é exigido pela matemática formal. Intuição envolve o processamento paralelo bastante distinto do processamento sequencial passo a passo necessário na dedução rigorosa. Uma intuição chega inteira na mente e pode ser difícil separar suas componentes em uma ordem lógica dedutiva. (TALL, 1991b p. 4)*

Ele afirma ser necessária uma abordagem do conteúdo matemático que apele para a intuição e que se una ao rigor, uma vez que as intuições são relações que os indivíduos estabelecem com o conhecimento, não sendo portanto universais. Para ele,

*A razão é bastante simples. Intuição é uma ressonância global no cérebro e que depende da estrutura cognitiva do indivíduo, que por sua vez também é dependente da experiência anterior do indivíduo. Não há razão para supor que um novato tenha as mesmas intuições como um especialista, mesmo considerando percepções visuais aparentemente simples. (TALL, 1991b, p. 5)*

Assim, ao utilizarmos recursos visuais para nos apropriarmos de uma intuição a serviço da lógica dedutiva, ou visualizarmos ideias matemáticas complicadas, é possível construirmos “intuições muito mais poderosas do que em uma abordagem tradicional.” (ibid., p. 20) Ao fornecer tal contexto “adequadamente poderoso, a intuição conduz naturalmente ao rigor da prova matemática.” (ibid, p. 20). Dentre os artigos sobre o ensino de cálculo e visualização deste autor encontramos publicações antigas (TALL, 1991a; TALL, 1991b) reeditadas recentemente, embora em menor detalhe (ver TALL 2013, p. 327), propondo uma prova do TFC a partir da visualização gráfica dos conceitos relacionados. Tal construção se distingue do que é feito convencionalmente<sup>3</sup>, e é uma das fontes para a elaboração das atividades propostas em nossa pesquisa de campo.

<sup>2</sup> A expressão “ah, entendi!” é a tradução de “Oh, I see.”, cuja tradução literal seria “oh, eu vejo”. Esta expressão manifesta um sentido de ver para entender. O texto original diz: “In mathematical research proof is but the last stage of the process. Before there can be proof, there must be an idea of what theorems are worth proving, or what theorems might be true. This exploratory stage of mathematical thinking benefits from building up an overall picture of relationships and such a picture can benefit from a visualization. It is no accident that when we think we understand something we say “oh, I see!” (TALL, 1991b, p.2)

<sup>3</sup> Esta abordagem é a apresentada no livro texto Cálculo e aplicações, referência HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Blucher, 1999.



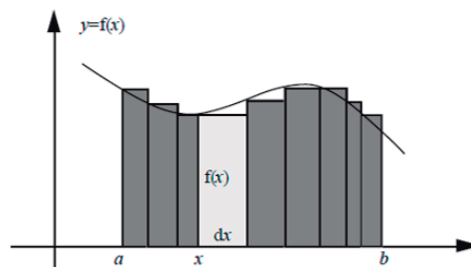
## UMA PROPOSTA VISUAL/GRÁFICA INTEGRADA À PROVA DO TFC

Tall (1991a) discute aspectos formais ligados ao TFC e as ideias sobre o significado da diferenciação e da integração. Em seu doutorado, desenvolveu, com esta intenção, um programa de computação gráfica (Graphic Calculus (1986)). Em seu artigo propõe uma demonstração visual para a parte 1 do TFC, que estabelece que *se uma função  $f$  for integrável em  $[a, b]$  e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Para o entendimento visual dos conceitos e relações envolvidas neste enunciado do TFC, Tall nos convida a olhar para a “figura certa”, observando relações existentes entre o gráfico da primitiva  $y = I(x)$  da função  $y = f(x)$  e essa função; não restringindo o foco, como normalmente, ao gráfico da própria  $y = f(x)$ , dado inicialmente.

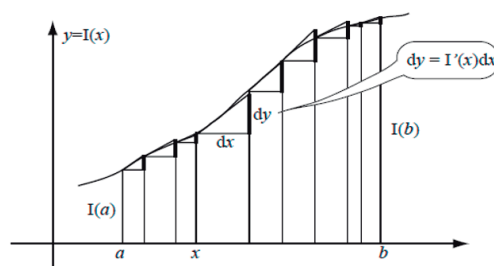
**Figura 1** - Aproximação da área sob o gráfico por soma das áreas de retângulos.



Fonte: Tall (1991a, p. 4)

A Figura 1 traz o gráfico de uma função  $f$  e uma ilustração do método de Riemman para a determinação da área sob este gráfico. Para  $y = f(x)$ , considerar  $y = I(x)$ , tal que  $I'(x) = f(x)$ , como ilustrado na Figura 2. Temos a mesma divisão do intervalo  $[a, b]$  em subintervalos, como na Figura 1.

**Figura 2** - A soma  $\sum_a^b f(x)$  como a soma dos comprimentos  $\sum dy$ .



Fonte: TALL (1991a, p.4)

Tall propõe olhar o gráfico da função  $I(x)$ , na Figura 2. Para ele, a Figura 1 “que por muito tempo foi a visão padrão não é a correta para o TFC” (Tall, 1991j).

Em cada ponto  $x$  da subdivisão está desenhado, na Figura 2, a reta tangente à curva gráfico de  $y = I(x)$ . Esta reta tem por inclinação:

$$I'(x) = \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

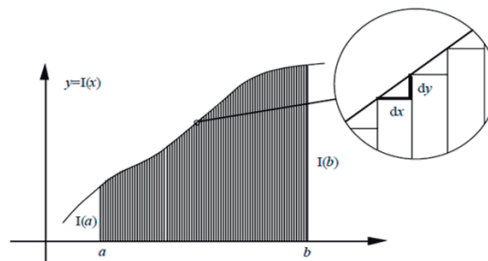
Então o incremento  $dy$  correspondente à tangente é:

$$dy = I'(x).dx = f(x).dx$$

E a soma  $\sum_a^b f(x).dx$  pode ser reescrita como a soma dos comprimentos  $\sum dy$  onde cada  $dy$  é a componente vertical do vetor tangente ao gráfico de  $y = I(x)$ , desenhado na figura. A soma  $\sum dy$  é a soma dos segmentos de reta verticais representando as componentes verticais do vetor tangente ao gráfico, em cada ponto  $x$ . Quando  $dx$  é muito pequeno, de modo que o gráfico de  $y = I(x)$  seja praticamente uma linha reta de extremidades  $(x, I(x))$  e  $(x + dx, I(x + dx))$ , então  $dy$  é aproximadamente igual ao incremento no gráfico,  $I(x + dx) - I(x)$ . Ao somarmos os incrementos ao gráfico de  $x = a$  à  $x = b$ , ou seja, os “degraus” verticais  $dy$ , temos como resultado o valor  $I(b) - I(a)$ . A Figura 2 nos dá uma indicação desta ideia.

O autor questiona que este argumento visual falha em parte porque o autor foi obrigado a fazer os retângulos claramente “largos” para que pudéssemos ver o que está acontecendo; e isto, por sua vez, significa que o gráfico pode ser tão curvo em cada retângulo que  $dy$  seja claramente diferente de  $I(x + dx) - I(x)$ . Por outro lado, se imaginarmos um número grande de retângulos e uma parte do gráfico sendo ampliado, visualizamos sua “retidão local” com retângulos ao lado uns dos outros como na Figura 3.

**Figura 3 - Olhando atentamente para o processo de soma**



Fonte: TALL (1991a, p.5)

Quando o comprimento  $dx$  se torna cada vez menor, a soma dos comprimentos  $\sum dy$  se aproxima de  $I(b) - I(a)$ ; e o argumento está completo.

Utilizando um recurso de “zoom”, podemos ver que a curvatura do gráfico se torna cada vez menor - ou seja, o gráfico fica cada vez menos curvo, em cada subintervalo, “infinitesimal”. O gráfico tende a se tornar cada vez mais reto conforme nos aproximamos com o zoom. Tall comenta que este argumento demanda sermos capazes de “ver” que o erro relativo na diferença entre o valor de  $dy$  e o real “degrau” vertical  $(I(x + dx) - I(x))$  da curva torna-se menor quando é “infinitesimal” - quer dizer,

menor que qualquer número positivo, mantendo-se maior que zero. Em outras palavras, este é um indício de que os erros são agora pequenos em relação ao “degrau” vertical. Então, superpondo-os, ou somando-os, o erro total também é agora muito pequeno em relação ao “degrau” vertical total. Em outras palavras, começamos a “ver” que, quando os comprimentos  $dx$  se tornam infinitesimais, as somas dos “degraus” verticais correspondentes,  $\sum dy$ , se tornam aproximadamente iguais a  $l(b) - l(a)$ .

Por outro lado, expressão  $\int_a^b f(x).dx$  com o símbolo de integral é usada para representar o limite de  $\sum_a^b f(x).dx$  quando (o tamanho máximo de)  $dx$  se torna infinitesimal. Como o limite de  $\sum_a^b f(x).dx$  representa a área sob o gráfico  $f(x)$  em  $[a, b]$ , o argumento fornece uma intuição poderosa a respeito do TFC: a área dada pelo limite de  $\sum_a^b f(x).dx$  pode ser aproximada, infinitesimalmente, adicionando-se incrementos  $dy$ , sobre retas tangentes à primitiva de  $f(x)$ ,  $l(x)$ . Ou seja,

Quando  $dx$  se torna infinitesimal

$$\sum dy = \sum_a^b f(x).dx = \int_a^b f(x).dx = l(b) - l(a), \text{ onde } l'(x) = f(x).$$

As ideias construídas nesta proposta sugerem atividades para desenvolvimento do projeto de pesquisa que passamos a descrever na seção a seguir.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS E ETAPAS DA PESQUISA

Planejamos nossa pesquisa em duas etapas, precedida por um estudo piloto, sugeridos por Segadas (1998). Ambos os estudos, principal e piloto, envolveram participantes que já haviam cursado cálculo diferencial e integral, já tendo portanto estudado o TFC.

O estudo principal contou com a participação de dezoito alunos voluntários matriculados no Instituto Multidisciplinar (IM) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), localizado no município de Nova Iguaçu. Todos estavam matriculados em uma mesma disciplina de Cálculo 2 do curso noturno de Licenciatura em Matemática. A escolha do campo de pesquisa para o estudo principal decorreu do fato de ser de fácil acesso ao primeiro autor deste artigo, e da importância da produção científica daquela instituição no espaço e para as pessoas da cidade em que ela se situa.

A primeira etapa da pesquisa consistiu na elaboração e aplicação de um questionário. Oito itens foram elaborados para conhecer aspectos da imagem conceitual evocados pelos participantes e relacionados às noções de continuidade, derivação, integração e, principalmente, ao TFC. A aplicação do questionário proporcionou aos participantes uma experiência para explorar e relacionar, com lápis e papel, as relações visuais e gráficas expressas pelo TFC. Entendemos que o campo de pesquisa, em ambos os estudos piloto e principal, pode ter recebido contribuições de uma abordagem diferenciada da tradicional, pressuposta na elaboração do questionário e da oficina. No estudo piloto, dois licenciando em matemática, voluntários do quarto período de um curso noturno de uma universidade pública, responderam o questionário e avaliando-o. No estudo principal, os dezoito participantes responderam ao questionário em uma sessão com duração de uma hora e quarenta minutos, cedida pelo professor da disciplina.

A segunda etapa da pesquisa consistiu da preparação e oferta de oficina com computadores, após a análise das respostas e avaliações do questionário piloto aplicado.

Doze dentre os dezessete participantes na oficina haviam respondido o questionário. A oficina foi pensada e planejada para ser realizada em um encontro. Devido à impossibilidade do uso do la-

boratório no dia agendado, ela foi realizada em dois encontros, reduzindo para oito o número de participantes nos dois dias, dentre os doze anteriores. Esses oito alunos foram considerados em nossa análise. A proposta feita pelo pesquisador aos participantes foi a de que eles constituíssem duplas para a realização das atividades. Alguns pediram a permissão para realizar a oficina individualmente porque não se sentiam confortáveis trabalhando em grupo. O pesquisador atendeu a este pedido.

### **Sobre as atividades da pesquisa e apresentação da análise do material empírico**

O questionário e a oficina foram elaborados para conhecer a imagem conceitual evocada (TALL e VINNER, 1981) pelos participantes, tendo o TFC e conceitos relacionados como referência, em seus aspectos formais, algorítmicos e intuitivos e as relações entre eles (FISCHBEIN, 1994). A expectativa com o uso de visualizações para apresentar o TFC e conceitos correlatos (TALL, 1991) é a de que emergjam aspectos nas respostas dos participantes que possam ser analisados em termos de cognição intuitiva, compreensão intuitiva, ou solução intuitiva (FISCHBEIN, 1994). O software de geometria dinâmica GeoGebra foi escolhido para as atividades da oficina, por ser gratuito, por possibilitar representações algébrica, gráficas e numéricas simultâneas, e exploração virtual dos objetos na tela. A realização das atividades se deu de forma individual e em dupla.

As seis primeiras questões do questionário referem-se a aspectos formais e algorítmicos do conhecimento matemático relacionado ao TFC. Solicitam enunciar definições de conceitos como o de continuidade, conhecer o enunciado do TFC perguntado de modo indireto, e resolver integrais definidas. Dentre estas últimas, relações entre aspectos formais, algorítmicos e visuais são possíveis, com possibilidades de algumas integrais serem resolvidas graficamente. A sétima e oitava questões criam um espaço para exploração de relações entre gráficos, visualização de primitivas e derivadas de funções, expressas no TFC.

Dado o escopo deste artigo, optamos por descrever em maior detalhe os objetivos e apresentar a análise da oitava questão do questionário porque esta se refere especificamente ao TFC, que é o objeto de estudo nesta pesquisa.

Justificativa semelhante leva-nos a considerar a terceira e última atividade proposta na oficina com computadores. Para oferecer a oficina, o primeiro autor deste trabalho desenvolveu objetos de aprendizagem utilizando o Geogebra

Para a produção do material empírico, as respostas à questão oito do questionário e os relatórios escritos pelos alunos durante a terceira atividade da oficina foram organizados buscando identificar: os conceitos matemáticos que os participantes evocam com o auxílio de recursos visuais gráficos e computacionais, os conceitos matemáticos trabalhados em sala de aula de cálculo, os modos com que a intuição se mostra presente nas respostas dos alunos às atividade.

Na próxima seção detalhamos a elaboração da oitava questão do questionário, seguida da terceira atividade da oficina.

### **Sobre as atividades da pesquisa: a elaboração da oitava questão do questionário**

A oitava questão do questionário pode constituir um ambiente para explorar relações sobre noções centrais do TFC, utilizando recursos visuais e gráficos, representados com lápis e papel. Na Figura 1, a área destacada pode ser escrita como uma integral definida da função  $y=f(x)$  representada, positiva no intervalo  $[-1, 1]$ . A Figura 2 traz o gráfico de uma função  $y=g(x)$  e suas coordenadas,

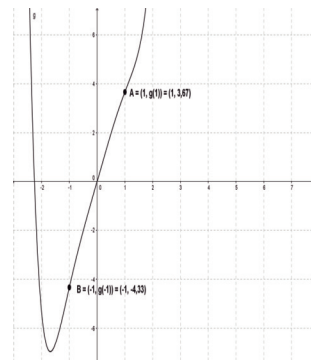
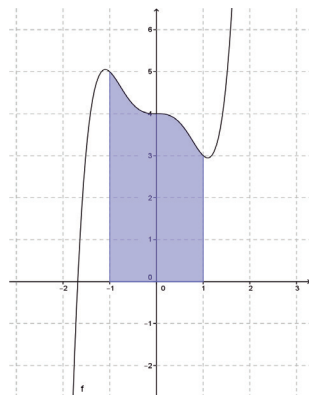
nas extremidades do mesmo intervalo indicado na Figura 1. O enunciado da questão as relaciona, estabelecendo que esta segunda função é a primitiva da primeira.

A intenção é promover a exploração da primeira parte do TFC e conhecer imagens conceituais evocadas em um cenário em que a visualização e uso de relações expressas pelo TFC são suficientes para resolver o problema. Em particular, investigamos se os estudantes relacionam a área sob o gráfico de  $f$  em  $[-1, 1]$  ao valor  $g(1) - g(-1)$ , onde  $g$  é uma primitiva de  $f$ .

Nós desenvolvemos totalmente a oitava questão para esta pesquisa, em sua concepção e proposição de gráficos, sugeridos por Tall (1991): a questão (do cálculo da área na Figura 1) se resolve com facilidade olhando para “figura certa” (TALL, 1991a), representada na Figura 2.

#### Quadro 1 - Questão 8, no questionário

Nas figuras abaixo estão representados os gráficos das funções  $f$  e  $g$ . Sabendo-se que  $g' = f$  (ou seja,  $g$  é a primitiva de  $f$ ), calcule a área sob o gráfico de  $f$  (ilustrado na figura 1) no intervalo  $[-1, 1]$ . Justifique sua resposta, explicitando o método usado.



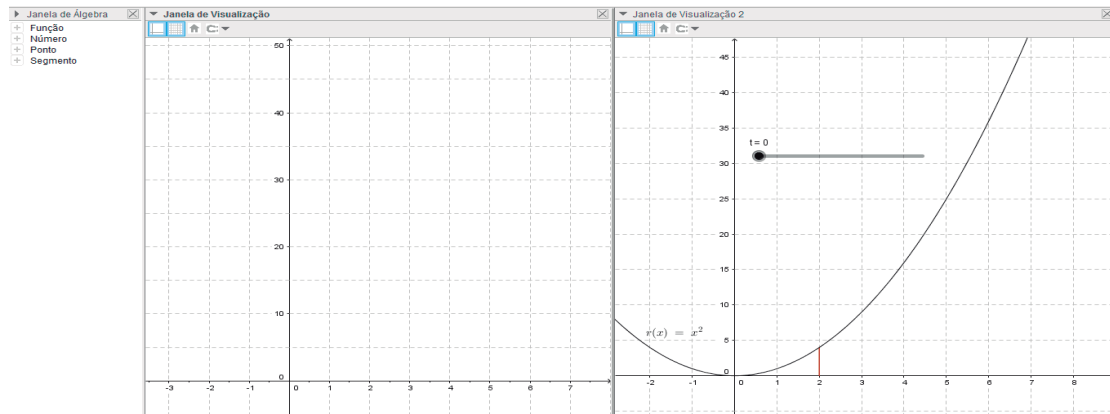
**Figura 1** - Gráfico da função  $f$ . **Figura 2** - Gráfico da função  $g$ .

Fonte: arquivo pessoal

### Sobre as atividades da pesquisa: a elaboração da terceira atividade da oficina

A terceira atividade da oficina tem objetivo semelhante ao da oitava questão do questionário. Utilizando recursos de geometria dinâmica, pode constituir um ambiente para exploração virtual numérica, algébrica e gráfica para determinarmos a área abaixo de uma curva gráfico de uma função positiva; no caso da atividade proposta nos quadros a seguir, a função  $r(x) = x^2$ . Sua primitiva  $R$  pode ser gerada em um outro sistema de coordenadas em uma tela à esquerda da primeira apresentada. Nossa expectativa é que a movimentação dinâmica dos dois gráficos resulte no uso da primeira parte do TFC como um dos modos para encontrar o valor de áreas que são delimitadas ao movimentar cursores na tela. Uma última questão na atividade realizada na oficina propõe explicitamente ao participante que avalie se é possível encontrar a área sob o gráfico de  $r$  utilizando somente informações no gráfico de  $R$ . As telas nos quadros a seguir foram copiadas da atividade do Geogebra, após a realização dos procedimentos indicados. No Quadro 2, a tela inicial da atividade.

### Quadro 2 - Atividade 3, Grupo 1, questões de 1 a 7



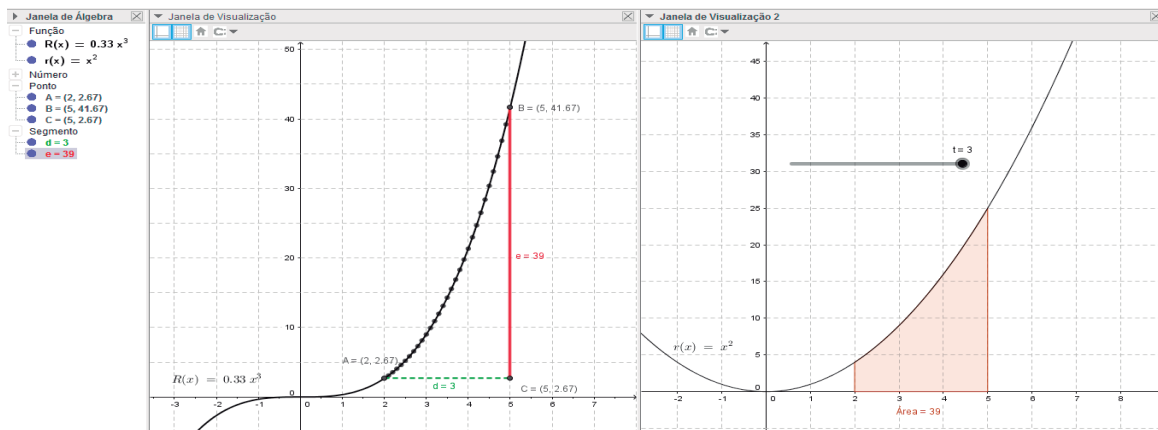
Fonte: arquivo pessoal.

Clique na aba Segmento e ative os itens  $d$  e  $e$  e mexa na variável  $t$  novamente.

Esta atividade corresponde a um grupo de 7 questões, convidando o participante a modificar o parâmetro no cursor, indicado por  $t$ , o que resulta em intervalos de comprimento  $[1, 1+t]$  no eixo  $x$ , ressaltando a área abaixo de  $r(x) = x^2$ , acima do eixo  $x$ , e limitada por  $x = 1$  e  $x = 1+t$ .

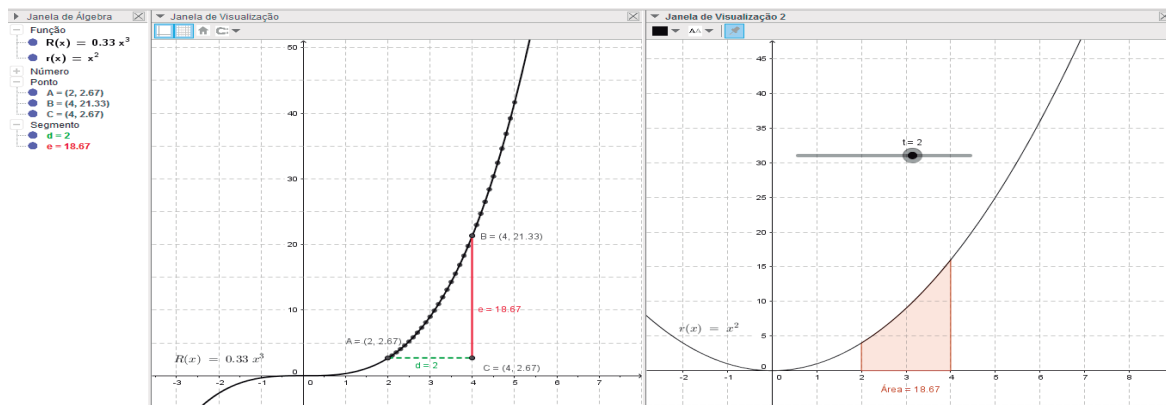
Nos quadros 3, 4 e 5 podemos ver a tela exibida no computador para a realização do quarto grupo de questões da atividade 3 da oficina.

### Quadro 3 - Atividade 3, Grupo 2, questões de 8 a 9



Fonte: arquivo pessoal.

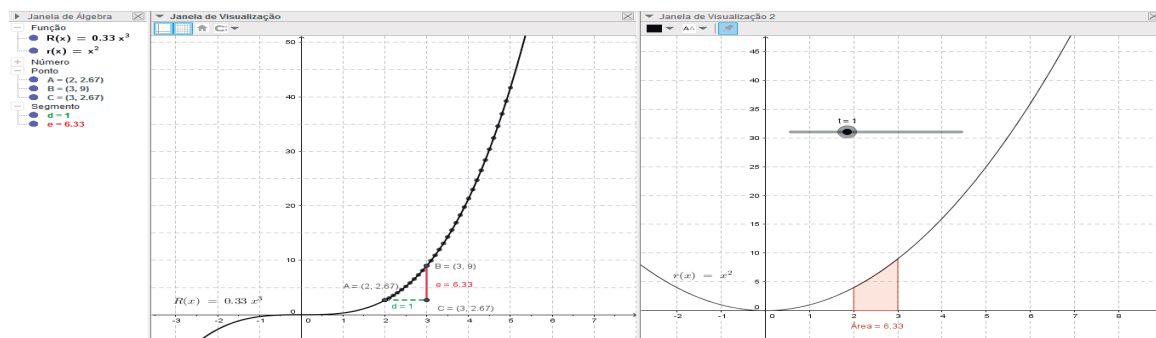
### Quadro 4 - Atividade 3, Grupo 3, questões



Fonte: arquivo pessoal.

A função primitiva  $R$  é representada simultaneamente à movimentação do parâmetro  $t$ , que modifica a área representada e seu valor numérico.

### Quadro 5 - Atividade 3, Grupo 4, questões de 14 a 18.



Fonte: arquivo pessoal.

Após permitir a exploração simultânea nas duas telas, a atividade propôs o conjunto de questões a seguir:

14. Explique o que são os valores de  $d$  e  $e$  para os valores de  $t$  da janela ao lado.
15. Você poderia escrever  $e$  em função dos valores da função  $R$ ?
16. Qual é a relação do valor de  $t$  com o valor de  $d$ ?
17. Qual é a relação do valor da Área da janela da direita e o valor de  $e$ ? Por que isto acontece?
18. Utilizando as informações encontradas nesse exercício e tendo os dois gráficos a sua disposição, para você é possível encontrar a área sob o gráfico  $r$  num intervalo  $[a, b]$  utilizando somente as informações do gráfico de  $R$ ?

O objetivo é investigar os conhecimentos e as relações que os participantes evocam ao se envolverem com estas explorações. As questões 14 a 18 formuladas são significativas em termos

da abordagem, direcionada, da utilização do computador na oficina. Os objetos de aprendizagem concebidos, no entanto, permitem usos diversos como recursos didáticos. A seguir, apresentamos nossa análise das atividades realizadas pelos participantes e os resultados. Incluímos os participantes do estudo piloto, uma vez que não houve alterações no questionário para o estudo principal. Os percentuais indicados não representam o número total de participantes, porque alguns deles evocaram ou evidenciaram mais de uma imagem associadas aos conceitos. Para garantir o anonimato dos estudantes, seu nome está associado a uma letra do alfabeto, escolhida por eles.

## ANÁLISE E RESULTADOS

Doze dentre vinte participantes que responderam ao questionário deixaram a questão 8 em branco e dois escreveram que não sabiam respondê-la. Consideramos em nossa análise os seis desenvolvimentos escritos por alunos, em busca por sua solução. À primeira vista parecem seis respostas que nada têm em comum. Nossa análise busca entender que aspectos, de algum modo, as identificam, e as distinguem.

Ao investigarmos *que conceitos matemáticos os alunos evocam ao participarem de atividades que exploram a aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos e computacionais*, nossa análise das respostas dos participantes à questão oito do questionário indica que em torno da metade dos alunos *evoca o conceito de integral definida* e que a maioria *explora as informações visuais* fornecidas pelos gráficos.

Também em torno da metade dos participantes *evoca o TFC*, embora a porcentagem de alunos que conseguem *evocá-lo e relacionar as informações visuais entre dois gráficos* seja muito baixa, 12,5%. De fato, apenas um dentre cinco participantes que responderam este item estabeleceu explicitamente esta relação.

Em sua resposta escrita, o aluno B *relaciona as informações visuais entre os dois gráficos e evoca o TFC* para resolver o problema.

**Figura 4** - Resposta do aluno B ao item (a) do exercício 8.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[ g(x) \right]_{-1}^1 = g(1) - g(-1) = 3,67 - (-4,33) = 4,33 + 3,67 = 8$$

A área de  $f$  até o eixo  $x$ , no intervalo é a integral de  $f(x) dx$  nesse intervalo, que é o valor da primitiva ( $g$ ) do ~~valor~~ valor final menos o valor inicial do intervalo, ou seja,  $g(1) - g(-1)$ .

Fonte: Questionário do aluno B.



O aluno B evoca o conceito de integral definida, sua interpretação como uma área, e explora as informações nos gráficos, relacionando-as, ao expressar os valores de  $g(1)$  e  $g(-1)$ , essenciais para a resolução da questão utilizando as informações visuais e o TFC.

Já a aluna A evoca o conceito de integral definida, interpretando-a e escrevendo-a com limites de integração; deste modo, usando assim conceitos trabalhados em sala de aula, uma vez que já havia concluído a disciplina que trabalha este conteúdo.

**Figura 5** - Resposta do aluno A à questão 8.

$$g(x) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Fonte: Questionário da aluna A.

Ela explora as informações visuais expressas graficamente e relaciona parcialmente as informações visuais entre os dois gráficos; visto que que expressa a integral definida, e a identifica com a denominação  $g(x)$ , da primitiva representada na questão, embora sem representar os limites de integração em  $g$ . Não utiliza de fato o TFC, em sua resposta escrita, o que pode se justificar pelo fato de que as relações estavam estabelecidas visualmente ou graficamente, e não expressas algebricamente como usualmente são apresentadas em sala de aula e na maioria dos livros textos analisados.

O aluno I evocou o que ele denominou de “método de Riemann” para determinar a área da figura 1.

**Figura 6** - Resposta do aluno I à questão 8 do questionário.

para método de Riemann:  $x_0 = -1$   $x_n = 1$

$$x_1 = x_0 + \frac{x_n - x_0}{n} = -1 + 1 - (-1) = -1 + \frac{2}{n}$$

$$x_2 = x_0 + \left(\frac{x_n - x_0}{n}\right) \left(\frac{x_n - x_0}{n}\right) = -1 + \frac{2}{n} \cdot 2$$

$$x_3 = -1 + \frac{2}{n} \cdot 3$$

$$x_n = -1 + \frac{2}{n} \cdot n$$

Fonte: Questionário do aluno I.

Figura 7 - Resposta do aluno I à questão 8 do questionário (continuação).

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n} = \Delta x \\
 \sum_{i=1}^n &= \left[ (x_1 \cdot \Delta x) + (x_2 \cdot \Delta x) + (x_3 \cdot \Delta x) + (x_n \cdot \Delta x) \right] \\
 &= \left( -\frac{1+2}{n} \right) + \left( -\frac{1+2}{n} \cdot 2 \right) + \left( -\frac{1+2}{n} \cdot 3 \right) + \left( -\frac{1+2}{n} \cdot n \right) \\
 &= -\frac{1+2}{n} (1+2+3+n) \\
 &= \frac{-1+2}{n} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \\
 &= \frac{1+n}{2} \cdot n
 \end{aligned}$$

Fonte: Questionário do aluno I.

Para tal, ele *evocou o conceito de área* sob um gráfico por soma de retângulos, embora não havendo informações suficientes para que utilizasse este recurso. Dito de outro modo, ele evoca conceitos relacionados ao problema, mas que, de fato, não são uma ferramenta com potencial para a sua resolução. O uso dessas ideias para resolução desta questão deste modo pode ter sido influenciada pela ação do professor em sala, visto que esta construção é comumente apresentada nas aulas de cálculo. Com isso, entendemos que o aluno *explora as informações visuais* para estabelecer sua solução, *evoca conceito de integral definida*, mas *não relaciona as informações visuais entre os dois gráficos e não evoca o TFC* para solucionar a questão.

A imagem na figura a seguir é a resposta do aluno K. Entendemos que este aluno *explorou as informações visuais* da questão, e *estabeleceu uma relação entre os dois gráficos particularizando a questão para utilizar procedimentos algébricos familiares*. Ele identifica o gráfico da função  $g' = f$  na Figura 1 com o de uma função do 2º grau, ainda que tal gráfico claramente não se assemelhe à forma visual de uma parábola. Considerando  $g'$  como uma função quadrática, ele *evoca o conceito de integral definida* e *evoca o TFC* para responder à questão algebricamente.

**Figura 8** - Resposta do aluno K à questão 8 do questionário.

$$\begin{aligned}
 g' &= -x^2 + 3,67x \\
 \int (x^2 + 3,67x) dx &\rightarrow - \int x^2 dx + 3,67 \int x dx \\
 &= - \left( \frac{x^3}{3} + 3,67 \right) \left( \frac{x^2}{2} \right) \Rightarrow - \frac{x^3}{3} + 3,67 \frac{x^2}{2} \\
 &= \left[ - \frac{x^3}{3} + 3,67 \frac{x^2}{2} \right] \\
 &= \frac{-1^3}{3} + \frac{3,67(1)^2}{2} \Rightarrow \frac{-1}{3} + \frac{3,67}{2} \\
 &= -0,3 + 1,835 = 1,535 \\
 \frac{-1}{3} + \frac{3,67}{2} &= 2,135 = 0,6
 \end{aligned}$$

Fonte: Questionário do aluno K.

O aluno P utilizou um recurso geométrico sobre áreas inesperado nesta questão: o de decomposição de figuras. Ele *explorou as informações visuais* presente no gráfico da figura 1, identificando visualmente que uma parte da figura “completaria” a outra formando um retângulo, cuja área pode ser determinada mais facilmente.

**Figura 9** - Resposta do aluno P à questão 8 do questionário.

$$\begin{aligned}
 A &= b \cdot h \Rightarrow A = 2 \cdot 4 \Rightarrow A = 8. \\
 \text{De } y=0 \text{ até } y=3, \text{ no intervalo } [-1, 1], \text{ a parte} \\
 \text{lacrada forma um retângulo. De } y=4 \text{ até } y=5, \text{ no} \\
 \text{intervalo } [-1, 0], \text{ a parte lacrada é exatamente "o que} \\
 \text{falta" no intervalo } [0, 1] \text{ em } y=3 \text{ até } y=4. \text{ Logo, se} \\
 \text{somarmos uma e outra, formaremos um retângulo de base} \\
 2, \text{ pois está no intervalo } [-1, 1] \text{ e altura } 4, \text{ pois está} \\
 \text{entre } y=0 \text{ e } y=4.
 \end{aligned}$$

Fonte: Questionário do aluno P.

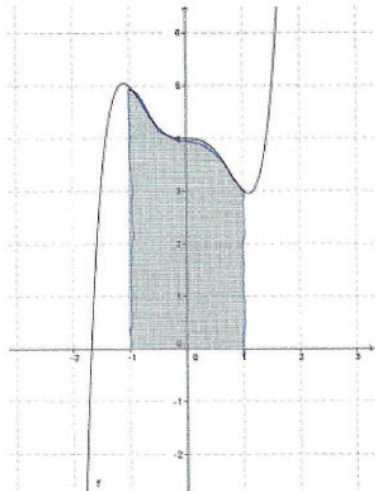
Ele não evocou o TFC, nem o conceito de integral definida e, também, não relacionou as informações visuais entre os dois gráficos para solucionar o problema, pois só utilizou as informações do primeiro gráfico. Porém, entendemos que visualização e intuição interviram potencialmente em sua resposta.

Apesar de não solucionar a questão, o aluno T fez anotações nos gráficos e na parte superior da folha de respostas que fornecem indicações sobre imagens evocadas. Ele fez traços limitando a área da figura 1 - cujo valor era pedido - e as distâncias verticais entre o eixo x e os pontos A e B na figura 2, cuja diferença das ordenadas era igual ao valor da área da figura 1. Interpretamos que ele explorou as informações visuais expressas pelos gráficos. Mesmo não respondeu à questão utilizando o TFC, e a imagem conceitual evocada parece estar associada à primeira parte do TFC. Em suas anotações na parte superior de sua folha, a imagem conceitual evocada também pode estar se referindo à segunda parte do TFC, uma vez que ele parece estabelecer uma relação entre a função derivada ( $f$ ) e sua primitiva ( $g$ ). Em nossa análise, ele evoca o TFC, ainda que parcialmente, e não relacionando as informações visuais entre esses dois gráficos para responder à questão.

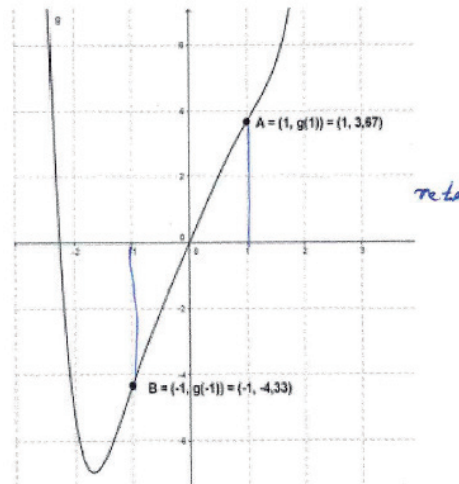
**Figura 10** - Resposta do aluno T à oitava questão do questionário.

$$\begin{matrix} f & = & g & \Rightarrow & g \\ f' & = & g' & & f \end{matrix}$$

8) Nas figuras abaixo estão representados os gráficos das funções  $f$  e  $g$ . Sabendo-se que  $g' = f$  (ou seja,  $g$  é a primitiva de  $f$ ), calcule a área sob o gráfico de  $f$  (ilustrado na figura 1) no intervalo  $[-1, 1]$ . Justifique sua resposta, explicitando o método usado.



**Figura 1** - Gráfico da função  $f$ .



**Figura 2** - Gráfico da função  $g$ .

Fonte: Questionário do aluno T.

O aluno O *explorou as informações visuais* do gráfico da figura 2, fazendo marcações dos valores de  $g(1)$  e  $g(-1)$ , circulando-os com a caneta. Não evocou *conceitos relacionados ao TFC* para resolver a questão e comentou com o pesquisador que não sabia dar resposta.

O quadro a seguir resume nossa análise.

**Quadro 6** - Uma análise das respostas ao questionário referentes à aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos.

	Número alunos/ Percentual de alunos	
<i>Evocam o conceito de integral definida</i>	3	37,5 %
<i>Exploram as informações visuais</i>	6	75 %
<i>Relacionam informações visuais entre dois gráficos</i>	1	12,5 %
<i>Evocam o TFC</i>	3	37,5 %
<i>Particularizam a questão de modo a usar procedimentos conhecidos</i>	1	12,5 %

Fonte: construção dos autores.

Sobre as atividades da oficina com computadores há diferenças interessantes a destacar. Todos os alunos que escreveram o relatório evidenciaram *explorar as informações visuais* e *relacionar as informações visuais entre dois gráficos*, gerados virtualmente na atividade proposta. Em torno de um quarto das respostas dos participantes indica que eles *evocam o conceito de integral definida*. Esta mesma porcentagem se repete para os que *evocam o TFC*. Houve, portanto, uma porcentagem menor de alunos evocando a relação entre o conceito de integral definida e o cálculo de áreas que no questionário. Por outro lado há um acréscimo no número dos que *exploram as informações visuais*. Este resultado pode ser natural, mas pode também indicar que os recursos de geometria dinâmica se mostram eficientes na construção visual das relações expressas pelo TFC.

Em síntese, analisamos oito respostas à oficina, oriunda das quatro duplas que participaram juntos e dos outros quatro alunos que participaram de forma individual. Das oito respostas, uma dupla não apresentou respostas ao grupo 4 de questões da atividade 3 da oficina. O Quadro 7 sintetiza os resultados de nossa análise.

**Quadro 7** - Uma análise das respostas no relatório da oficina referentes à aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos

	Número de alunos	Porcentagem de alunos
<i>Evocam o conceito de integral definida</i>	2	28,5 %
<i>Exploram as informações visuais</i>	7	100 %
<i>Relacionam informações visuais entre dois gráficos</i>	7	100 %
<i>Evocam o TFC</i>	2	28,5 %

Fonte: construção dos autores

De nossa análise sobre *como os alunos usam os conceitos trabalhados em sala de aula ao se envolverem em tais atividades utilizando recursos visuais gráficos e computadores*, destacamos que os alunos *evocam definições conceituais e conceitos trabalhados em sala de aula*, e *buscam relações entre estes e as representações visuais* investigadas. Por exemplo, identificando o conceito de integral definida com a noção de área sob gráfico de uma função. Por outro lado, como também destacado em Segadas (1998) e outras pesquisas, mesmo em situações em que a visualização pode fornecer uma solução rápida para a questão do cálculo de áreas, os participantes favoreceram utilização de métodos algébricos. Fatores de conflito potenciais incluídos nas imagens conceituais sobre integral foram evocados, visto que a integral definida é identificada como sendo a área sob o gráfico. Quando questionados sobre a área entre o gráfico e o eixo  $x$  no caso de um gráfico de função com valores negativos, as respostas não considerando o módulo das regiões abaixo do eixo  $x$ . Ao somar valores negativos referentes a essas regiões com as referentes às acima do eixo, o resultado diminuía e não aumentava, como esperavam. Assim, *as imagens conceituais evocadas relacionadas ao uso de integrais definidas estão em conflito com a noção de área entre um gráfico e o eixo  $x$* .

Sobre o conceito de função contínua, imagens conceituais e definições conceituais evocadas refletem os cenários descritos em Vinner (1991) de que mesmo em contato com a definição formal do conceito, esta pode ser reconstruída ou pode permanecer como antes, compartimentalizada, ou distorcida. Ainda assim os participantes são capazes de desenvolver os procedimentos algébricos e de enunciar relações que estão presentes no enunciado; como em Segadas (1998), mesmo desconsiderando ou sem compreender, o papel central da continuidade na hipótese do TFC. Na atividade 3 da oficina, os alunos identificaram relações entre os gráficos propostos, porém, não parecem ter evocado o TFC. Nenhum participante citou ou justificou sua resposta baseando-se neste resultado, mas sim, no cálculo de áreas e integral definida. Embora causando-nos estranhamento, parece-nos que o foco na exploração de aspectos visuais e gráficos, de modo geral, se dissociou do rigor, uma vez que os alunos nos pareceram *não evocar conceitos formais relacionados ao TFC* para solucionar as questões relacionadas. Na entrevista ao final da oficina, quando questionados, os participantes manifestaram que a pesquisa dizia respeito à relação entre derivada e integral; sem mencionar o TFC. Tais resultados reforçam um modelo de aprendizagem ou de construção do conhecimento que não se dá de modo linear, hierárquico, organizado; mas sim pela constituição de imagens conceituais relacionadas aos conceitos apresentados, nem sempre coerentes e consistentes, que podem conter fatores de conflito, como descrito em Tall e Vinner (1981), e em Vinner (1991).

Ao refletirmos sobre *de que modos a intuição parece se mostrar presente nas respostas dos alunos a tais atividades*, conjecturamos que um entendimento global das representações que estão sendo exploradas, e portanto o desenvolvimento de aspectos da cognição intuitiva (FISCHBEIN, 1994), é requerido para estabelecer as relações entre representações visuais distintas, e entre estas e resultados matemáticos expressos simbolicamente ou formalmente. Concluímos que atividades explorando características visuais e gráficas expressas pelo TFC, de forma dinâmica com o auxílio do computador, podem desenvolver tais aspectos intuitivos dos conceitos, uma vez que os alunos evidenciaram *explorar e relacionar as informações visuais*, mesmo que parcialmente.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades destacadas nos diferentes estudos sobre o TFC trazidos neste texto são significativas para prosseguirmos com investigações sobre o tema. Como constatamos em nossa própria

pesquisa, apenas um aluno relacionou as representações gráficas de uma função e de sua primitiva e evocou simultaneamente o cálculo de uma área e o Teorema Fundamental do Cálculo; ou seja, *evocou os conceitos necessários utilizando-os efetivamente como ferramentas fornecidas pelo TFC*. Além disto, ao longo do desenvolvimento desse estudo, outros questionamentos emergiram com potencialidades para futuras pesquisas. Persistem as questões sobre que contribuições uma abordagem de ensino do Cálculo que não dissocie a intuição e o rigor, utilizando recursos visuais e gráficos integrados ao desenvolvimento e prova de resultados e teoremas, pode promover na aprendizagem e para a produção do conhecimento matemático pelos alunos. Seria possível utilizarmos informações visuais/gráficas para provar resultados e teoremas de forma rigorosa, estreitando a relação entre rigor e a intuição, de modo que gráficos e visualizações sejam parte integrante da demonstração?

Por outro lado, ao refletirmos sobre o papel da visualização no processo de ensino e aprendizagem do TFC a partir dos resultados de nossa pesquisa, arriscamos a dizer que os recursos visuais e gráficos podem contribuir para o desenvolvimento de aspectos intuitivos dos conceitos matemáticos, para uma expansão das imagens conceituais sobre as relações existentes entre o gráfico de uma função e sua derivada, bem como entre a área sob um gráfico de uma função e o valor deste resultado, quando expresso e representado no gráfico de sua primitiva. Em outras palavras, os recursos visuais e gráficos podem contribuir para um entendimento global da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

## REFERÊNCIAS

- ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. Dissertação de mestrado. PUC/SP, 2007.
- ANDERSEN, E. **As ideias centrais do teorema fundamental do cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2011.
- CAMPOS, R. P. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2007.
- FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity**. In: *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1994.
- GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática)**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2013.
- REIS, F. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação - UNICAMP-SP, 2001.
- PICONE, D. F. B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.
- SCUCUGLIA, R., **Experimentação com Calculadoras Gráficas: a Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - UNESP. Rio Claro, 2006.

SEGADAS, C. **Students' understanding of the fundamental theorem of calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery**, Ph. D. Thesis, University of London, 1998.

TALL, D. O. **Using Technology to Support and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics**. In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. **Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus**. In: Mathematics Teaching, 137, p. 29-32, 1991a.

\_\_\_\_\_. **How Humans Learn to Think Mathematically**. Cambridge University Press. New York. NY. 2013

\_\_\_\_\_. **Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus**. In: Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, p. 105 -119, 1991b.

TALL, D. O. e VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. In: Educational Studies in Mathematics, v. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. **The role of definitions in the teaching and learning of mathematics**. In: TALL, David (ed). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991. p. 65-81.

---

**RECEBIDO EM:** 17 mar. 2017.

**CONCLUÍDO EM:** 14 abr. 2017.