

PLANEJAMENTOS COLABORATIVOS E REFLEXIVOS DE AULAS BASEADAS EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS VERBAIS DE MATEMÁTICA

PLANNING COLLABORATIVE AND REFLECTIVE CLASSES BASED ON VERBAL MATH PROBLEM SOLVING

VANESSA RIBEIRO GAIGHER*
MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA**
JULIA SCHAETZLE WROBEL***

RESUMO

Que progressos são apresentados em planejamentos colaborativos e reflexivos para o ensino, contrapostos àqueles burocráticos comumente praticados em instituições educacionais brasileiras? Como e por quê planejar aulas baseadas em resolução de problemas? Esse texto objetiva apresentar, discutir e justificar planejamentos diferenciados de aulas baseadas na resolução de problemas verbais de Matemática e responder tais questionamentos. Em meio à investigação, apresentamos contribuições de Polya, Ball, Fernandez, Yoshida, Isoda, Olfos, entre outros, que justifiquem a importância do planejamento de aulas, relevância da construção colaborativa e reflexiva para ações educacionais, aulas baseadas em resolução de problemas e impactos de métodos alternativos de planejamento e ensino sobre a aprendizagem de alunos. A investigação mostrou que o planejamento colaborativo e reflexivo dessas aulas contribuiu fortemente para a atenção sobre a compreensão dos enunciados pelos alunos e na antecipação de suas dúvidas, dificuldades, estratégias, mas principalmente no modo como os professores lidam com essas questões.

Palavras-chave: *Lesson Study*. Colaborativo. Reflexivo. Planejamento. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

What advances are presented in collaborative and reflective lessons planning as opposed to those that are bureaucratic, commonly practiced in Brazilian educational institutions? How and why do you plan problem-solving classes? This text aims to present, discuss and justify different lesson planning based on the solution of verbal Mathematics problems and to answer such questions. We present contributions from Polya, Ball, Fernandez, Yoshida, Isoda, Olfos, among others, that justify the importance of lesson planning, the relevance of collaborative and reflexive construction for educational actions, classes based on solving problem and the impact of alternative methods of planning and teaching on student learning. The research showed that the collaborative and reflexive planning of those classes contributed greatly to the concern about the comprehension of the statements by the students and the anticipation of their doubts, difficulties, strategies, but mainly on how teachers deal with these issues.

Keywords: *Lesson Study*. Collaborative. Reflexive. Lesson Planning. Solving Problem.

* Graduada em Matemática pela UFES e Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Ifes. Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo. Email: van_gaigher@yahoo.com.br.

** Doutora em Psicologia da Educação Matemática pela UNICAMP. Professora na Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática no Ifes. Email: alicevfs@gmail.com.

*** Doutora em Ciências pelo IMPA. Professora na graduação e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na UFES. Email: juliasw@gmail.com.

If you want to improve education, get teachers together to study the processes of teaching and learning in classrooms.

James W. Stigler

PONTOS DE PARTIDA

De que maneira planejamentos de aulas construídos de modo colaborativo e reflexivo podem contribuir para a prática de professores em aulas de Resolução de Problemas?

Para tentar responder essa pergunta, recorreremos a autores da Educação Matemática que se debruçaram sobre a resolução de problemas (POLYA; 1978, WROBEL et al. 2016, SOUZA; GUIMARÃES, 2015) e a formação da prática de ensino do professor (HILL et al. 2011, BALL; BASS, 2003, BALL; THAMES; PHELPS, 2008, PONTE; 2014), que destacam aspectos importantes, constituindo-se em um *corpus* avaliativo sobre a qualidade do planejamento de uma aula baseada em um problema verbal de Matemática.

Polya (1978) argumenta que não basta solucionar um problema. É útil que se busque por estratégias mais eficientes, mais curtas e que use conteúdos matemáticos mais básicos (*looking back*). Hill et al. (2011) defendem o envolvimento ativo dos alunos durante todo o processo, com a construção coletiva de soluções e o uso de diferentes estratégias matemáticas (visuais, concretas, verbais, simbólicas), com a orientação de conectá-las na medida do possível. Sobre isso, Souza e Guimarães (2015) alertam que o uso de estratégias matemáticas diversificadas é extremamente importante uma vez que, além de aumentar o repertório do aluno, delas podem emanar diferentes modelos de representações mentais.

Ball e Bass (2003) escrevem que o professor deve ser capaz de prever os possíveis pensamentos, raciocínios, dúvidas, facilidades e equívocos dos alunos. É a partir dessas dificuldades e facilidades dos alunos com conceitos, procedimentos e representações que os professores devem trabalhar, opinião corroborada por Ponte (2014). Para lidar com essas questões, Wrobel et al. (2016) enfatizam que o professor deve ser cuidadoso ao questionar os alunos, evitando perguntas amplas que possam bloquear o fluxo de raciocínio dos alunos. Dessa maneira, conseguimos colocar em prática o conhecimento pedagógico do conteúdo destacado por Ball, Thames e Phelps (2008) como indispensável à prática docente, uma espécie de ponte entre o conhecimento matemático do problema e a sua utilização em sala de aula. Para além de teorias, os autores alegam que tal conhecimento deve ser avaliado empiricamente, caso contrário estará fadado ao plano das ideias, limitando sua contribuição ao ensino e à aprendizagem dos alunos.

Essencialmente, tomamos desses autores ingredientes que devem integrar a prática de ensino de professores. Para além do zelo com “o quê” ensinar, devem ter em conta “como” fazê-lo. Esse *modus operandi* é diverso entre docentes e o compartilhamento pode ser enriquecedor para suas formações nesse âmbito, justificando, assim, o método que trazemos ao primeiro plano e se prestará como meio. A reflexão conjunta sobre como proceder na condução de uma aula pode fazer emergir planejamentos potenciais para a aprendizagem, no nosso caso, de aulas baseadas em problemas verbais de Matemática. Concretamente, apresentamos na Tabela 1, elementos que os autores que apoiam a presente investigação alegam serem relevantes para um planejamento de aula.

Tabela 1 - Itens que apoiam a construção conjunta do planejamento.

Itens para a reflexão, compartilhamento e construção conjunta do Planejamento	Apoio teórico/Literário
Apresentar critérios para escolha do problema. Planejar ações que verificação de possíveis obstáculos na compreensão do problema. Prever reações e respostas dos alunos aos questionamentos que os orientem para a solução do problema.	Ball, Thames & Phelps (2008) Pólya (1978) Ponte (2014)
Prever familiaridade dos alunos com o contexto do problema.	Pólya (1978) Ponte (2014)
Elaborar questionamentos pertinentes (não amplos) para as etapas de compreensão, planejamento, execução e <i>looking back</i> . Traçar uma linha de conduta para atuação na condução da aula baseada na resolução do problema, ou seja, programar as etapas da aula. Planejar mais de uma estratégia matemática de resolução para o problema. Planejar a avaliação do sucesso/fracasso dos alunos sobre a compreensão do texto do problema. Planejar a avaliação do sucesso/fracasso dos alunos sobre o planejamento da resolução do problema. Planejar a avaliação do sucesso/fracasso dos alunos sobre a execução matemática do problema. Planejar a avaliação do sucesso/fracasso dos alunos no <i>looking back</i> do problema.	Pólya (1978)
Preparar múltiplas representações mentais para o problema (visual, concreta, verbal, simbólica etc) ou múltiplas estratégias matemáticas na resolução do problema (geometria, álgebra, contagem, esquema, tabela, figura etc). Conectar as múltiplas representações e/ou estratégias matemáticas pensadas.	Hill et al (2011) Ponte (2014) Souza & Guimarães (2015)
Planejar a construção da resolução matemática com os alunos. Rever o problema com os alunos a fim de buscar soluções mais eficientes (mais curtas, mais elegantes, que use conteúdos mais básicos).	Hill et al (2011) Pólya (1978)
Compartilhar/discutir a(s) resolução(ões) matemática(s) com outros profissionais ou pessoas para que possa elaborar o planejamento.	Ponte (2014)

Fonte: Construída pelas autoras a partir dos referenciais: Ball, Thames & Phelps (2008); Pólya (1978); Ponte (2014); Hill et al (2011); Souza & Guimarães (2015);

Essas teorias e argumentações serão o fio condutor para planejar uma aula de resolução de problemas verbais de matemática a partir do método japonês chamado *Lesson Study*, baseado na reflexão e colaboração visando a potencialidade da aprendizagem do aluno.

PLANEJAMENTOS DE AULA: O QUE, COMO E PORQUÊ

O meio educacional está permeado de planejamentos - sistema educacional, escolar, curricular e ensino, esse último desmembrado em curso, unidade e aula. Algumas vezes, esses planejamentos são substituídos por documentos emersos de eventos que lhes dão nome, como exemplo, Jornada Especial Integral, Trabalho Pedagógico, entre outros, não diferindo, no entanto, em sua essência dos antigos rótulos. Em particular, nosso interesse está fixado no planejamento de aula como previsão do desenvolvimento de alguma ação em uma ou mais aulas. Mas, o que é planejar? Para que serve? O que esperar de um planejamento? Qual sua abrangência? Qual sua importância?

Concordamos com a maioria dos autores que definem o ato de planejar como o de se antecipar a algo que está por vir. Projetar-se à ação a ser desencadeada e imprimir-lhe organização, coerência, congruência e sentido humano aos meios para atingir os fins (NEIRA, 2004; HAYDT, 2006, LIBÂNEO, 1990; SANT'ANNA et al., 1988; ISODA, 2010; KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001). Visto des-

sa maneira, o planejamento é um processo de análise de uma realidade que considera fatores já existentes, desenha formas alternativas de ação e prevê opções para sua concretização. O plano de aula, especificamente, é o resultado da sistematização das ações a serem positivadas no período de uma ou mais aulas.

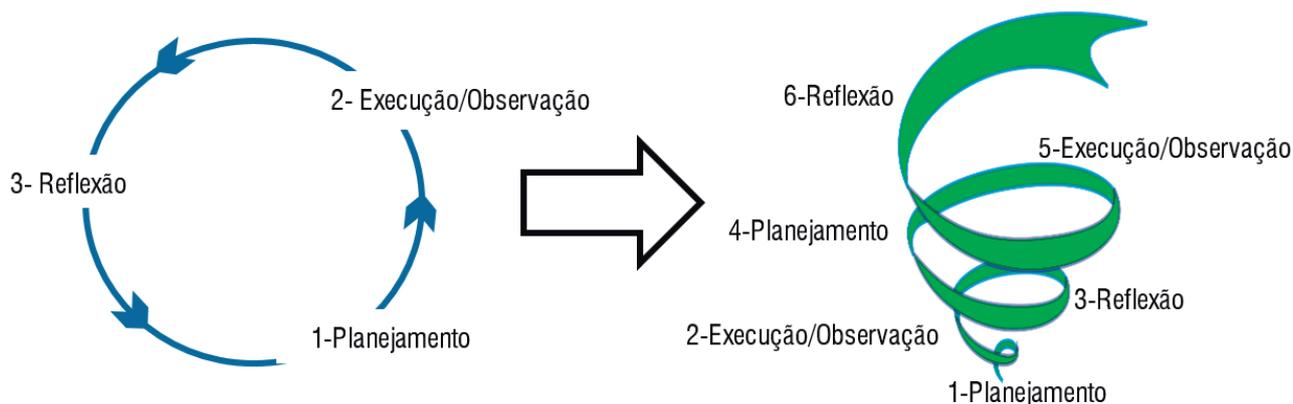
Embora a definição de planejamento e plano sejam consenso entre autores e investigadores educacionais, inclusive de que eles devam ser mutáveis e flexíveis, podendo ser individuais ou coletivos, o mesmo não ocorre, em geral, com as ideias do que neles deva constar e nem de como devam ser construídos. Sobre o teor de planos de aula, Sant'Anna et al. (1988) recomendam as seguintes etapas: identificação da escola e professor, tema central, objetivos, conteúdos, procedimentos (apresentação, desenvolvimento e integração), recursos e avaliação. Haydt (2006) diz que um planejamento de aula deve conter: previsão de objetivos imediatos, especificação de itens e subitens do conteúdo que serão trabalhados, definição de procedimentos de ensino, organização de atividades, indicação de recursos que serão usados em aula e estabelecimento da avaliação das atividades. Libâneo (1994), por sua vez, indica fazer constar o(s) objetivo(s) específico(s) da aula, conteúdo(s), previsão do tempo a ser investido e desenvolvimento metodológico. Fernandez e Yoshida (2004) destacam essa construção em duas sessões: na primeira, data e hora, ano escolar, nome do conteúdo envolvido, razões para organização da aula; na segunda sessão, as metas da unidade, itens relacionados, planejamento das atividades de aprendizagem, reações esperadas dos estudantes, possíveis respostas do professor às reações dos alunos, coisas a serem lembradas, perspectivas de avaliação (interesse, atitude, modos de raciocinar, processamento de conceitos, habilidades e conhecimento), coisas a preparar, objetivos da aula e progressos da aula. Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) nos falam sobre a importância do planejamento como ferramenta que visa reduzir imprevisibilidades na prática da sala de aula. Ressaltam ainda que no contexto de ensino, a proficiência requer, entre outras coisas, uma competência estratégica em planejamentos eficazes e na resolução de problemas que aparecem durante a aula.

Seja como for, o ato de planejar uma aula ganha relevo, principalmente, por orientar o pensamento do professor, fornecendo-lhe uma linha de conduta baseada em raciocínios fundamentados nas finalidades da aula. No que diz respeito a como ser construído, professores e investigadores japoneses desenvolveram um método que ficou conhecido como *Lesson Study*, objeto do próximo tópico.

PLANEJAMENTO EM UM *LESSON STUDY*

Lesson Study, segundo Fernandez e Yoshida (2004), é uma prática na qual professores japoneses se empenham em melhorar a qualidade de seus ensinamentos e enriquecer as experiências de aprendizagens matemáticas dos alunos. O método de estrutura cíclica é centrado na colaboração-ação-reflexão que integram três etapas principais: planejamento da aula, sua execução, posterior análise e reflexão dos pontos que atingiram as expectativas ou não dos professores (ISODA, 2010), podendo haver replanejamento, reexecução e nova reflexão, a depender dos resultados anteriores e da necessidade de nova aplicação do plano. As autoras preferem entendê-las e dispô-las em uma configuração espiralada - denominada *Espiral do Lesson Study* - por ser uma representação que transmite ideia de que a cada novo passo agregam-se ações em nível mais elevado de maturidade (Figura 1).

Figura 1 - Do Ciclo à Espiral do Lesson Study.



Fonte: As autoras.

Isoda e Olfos (2009) asseguram que o *Lesson Study* é uma atividade que potencializa a qualidade do ensino dos professores que participam dele, contribui positivamente para a aprendizagem dos estudantes, além de favorecer a profissionalização docente e a qualidade do ensino baseado no currículo local, podendo, na nossa opinião, influenciar a identidade da prática profissional docente ao longo de sua formação continuada.

Apesar de nossa investigação ter sido mais ampla, abarcando um *Lesson Study* completo, contemplando todas as suas etapas, apresentamos aqui um recorte dessa investigação. Notadamente, estamos no presente artigo interessadas na construção e produto da primeira etapa de um *Lesson Study* - o planejamento colaborativo¹ - por ser ele um dos diferenciais do processo de elaboração de outros planejamentos, como antes mencionamos, apesar de se assemelhar em certos teores. Nesse método, inicialmente, alguns docentes, da mesma escola ou não, atuando sobre o mesmo ano escolar ou não, bem como dirigentes educacionais, se reúnem com o fim de elaborar uma aula - ou uma sequência de aulas - específica sobre um conteúdo matemático constante em um currículo escolar, traçam objetivos para a aprendizagem do conteúdo eleito, preocupando-se com as atitudes, comportamentos esperados e o despertar da curiosidade. Para esse propósito, discutem alguma problematização cujo contexto seja familiar e desafiador para os alunos.

No *Lesson Study*, os alunos devem sempre assumir postura ativa diante de seus aprendizados, partilhando ideias, raciocínios, dúvidas com seus colegas e professor. Essa exigência requer intenso trabalho de pesquisa pelo grupo de professores prevendo-elaborando-avaliando: o que o professor pretende fazer; como deve construir a problemática; que recursos usar para a abordagem inicial e continuada; que questionamentos formular para direcioná-los para a compreensão do problema, estabelecimento de estratégias de solução, uso da simbologia matemática e avaliação pelos próprios alunos; como instaurar um ambiente de compartilhamento das diferentes ideias dos alunos (*neriage*) e de que maneira deve organizar a lousa tal que todos possam acessar as diferentes ideias (*bansho*) e discuti-las. O planejamento deve programar múltiplas estratégias, sempre que possível, variando representações geométricas, algébricas,

¹ Entendemos o termo **colaboração** assim como Vandenbos (2010): “1. Ato ou processo de duas ou mais pessoas trabalhando juntas a fim de obter um resultado desejado por todas. 2. Relacionamento interpessoal em que as partes demonstram cooperação e sensibilidade às necessidades do outro”.

aritméticas, por esquemas, entre outras, conectando-as, ampliando o repertório de estratégias de resolução pela contribuição uns dos outros.

Mais detalhadamente, o grupo de professores deve formular questionamentos, se antecipar às dúvidas e programar respostas/ações que desembarquem situações que os desviem dos objetivos da aula. Ademais, devem traçar modos de avaliar a aprendizagem sobre o conteúdo abordado. Após o planejamento, todo o grupo de professores observa a execução da aula por um deles sem interferir, seguida de nova reunião para avaliação dos impactos de pontos considerados potencialmente benéficos ou não à aprendizagem dos alunos.

O planejamento colaborativo do método *Lesson Study* se diferencia de outros planejamentos não exatamente pelas sessões descritas por autores de didática - objetivos, metas, conteúdos, procedimentos, recursos e avaliação, por exemplo - mas, sobretudo, nos ingredientes sobre o *modus operandi* realizado pelo grupo de professores. Para além desse aspecto, professores japoneses (FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004; ISODA, 2010) concordam que a problematização deve ser constante em suas aulas, justamente por poder promover o desenvolvimento requerido em Matemática: raciocínio, criticidade, diversidade de estratégias, entre outros.

Além da problematização, entendida como uma situação contextual que favoreça discussão sobre algo que se queira abordar, a resolução de problemas² em aulas de Matemática é indicada por educadores matemáticos (SCHOENFELD, 1996; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014; ABRANTES, 1989; TAKAHASHI, 2006) como ponto de partida para novos conhecimentos, para solucionar problemas ou, simplesmente, como motivação. No entanto, seus usos (ou a ausência deles) têm sido reclamados por esses educadores, provavelmente, pelo caráter de imprevisibilidade sobre aulas baseadas nessa abordagem. Problemas de Matemática costumam ser singulares, possuem mais de uma estratégia de resolução e reivindicam todo o potencial instrumental matemático assimilado até então pelo resolvidor. Nesse caso, como planejamentos colaborativos poderiam auxiliar professores em aulas desse tipo?

Professores e investigadores japoneses relatam fatores relevantes que devem tomar lugar nos planejamentos de aulas em meio aos *Lessons Studies*, cujo método já supõe que sejam colaborativos. De início, esses autores (BALDIN, 2009, FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004, ISODA; OLFOS, 2009, FUJII, 2014) destacam a importância do estabelecimento de critérios para a escolha da problemática/problema, prevendo familiaridade dos alunos com o contexto e possíveis obstáculos para sua compreensão. Nessa conjuntura, o grupo de professores deve elaborar questionamentos pertinentes que orientem o raciocínio dos alunos levando-os à compreensão e oferecendo-lhes oportunidade de reflexão e apresentação de dúvidas. O planejamento deve se antecipar à avaliação das diferentes fases da resolução de um problema - compreensão, estratégia imaginada e execução matemática.

SOBRE OS DADOS

Esse estudo, de caráter qualitativo desenvolveu-se no decorrer da disciplina “Tópicos Especiais

² Assumimos neste trabalho a concepção de **problema** tal qual Souza e Guimarães (2015, p.137): “[...] estamos perante um problema quando nos confrontamos com uma questão que nos interessa responder ou resolver e não dispomos previamente de uma estratégia, pelo menos completamente definida, para o fazer. Resulta daqui assim que, por um lado, o que é um problema para alguns, pode não o ser para outros, por outro lado, que todo o problema encerra uma questão, embora, nem toda a questão constitua um problema. Se alguém possuir antecipadamente todos os meios para alcançar os fins delineados, não há que falar em problema, mas em exercício para esse alguém. Um exercício requer de um sujeito baixo investimento cognitivo, uma vez que já está de posse dos mecanismos para o resolver, uma vez que apenas necessita de aplicar, mais ou menos directamente, meios que já possui para a sua resolução”.

em Educação Matemática: resolução de problemas”, ofertada à professores³, mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo pela segunda autora deste artigo em conjunto com quatro professores⁴ de Matemática⁵, três dos quais, autores deste texto. Nove alunos-professores, docentes em Matemática, Física e Engenharias, foram convidados a lecionar aulas baseadas na resolução de um problema verbal⁶ de Matemática do tipo mal-estruturado⁷.

Inicialmente, na primeira aula da disciplina, foi disponibilizada uma lista contendo onze problemas com essa característica e os alunos-professores deveriam escolher um desses problemas, ou outros com as mesmas características. Os problemas estavam em sintonia com a habilidade matemática de alunos regulares dos anos finais do Ensino Fundamental, pelo nível de dificuldade, e não exatamente pelos pré-requisitos de conteúdos matemáticos. Foi solicitado, então, que planejassem uma aula baseada no problema escolhido. Nenhuma orientação foi dada aos alunos-professores para essa elaboração, exceto que deveriam realizá-la sozinhos e conforme estavam acostumados a desempenhá-la em suas escolas/aulas regulares.

Na aula seguinte, foram recolhidos os planejamentos escritos de cada aluno-professor e quatro deles ministraram para seus pares (os outros alunos-professores da disciplina de Tópicos Especiais) a aula baseada no problema eleito (Figura 2). Na terceira aula, os outros cinco alunos-professores fizeram o mesmo. No quarto encontro, as autoras deste trabalho ministraram uma aula teórica para os alunos-professores abordando e discutindo heurísticas da resolução de problemas e como conduzi-las em uma aula, tipos de problemas, representação mental e características principais do método *Lesson Study*, visando fornecer-lhes subsídios para as ações que viriam nas próximas aulas. As atuações das aulas dadas pelos nove alunos-professores foram discutidas no grupo e eles reconheceram aspectos que estavam/não estavam em sintonia com as teorias estudadas, refletindo e discutindo-as.

Na quinta aula, os nove alunos-professores foram divididos em quatro grupos, cada um dos quais deveria replanejar a aula ministrada por um dos membros de cada grupo sobre o mesmo problema (Figura 3).

Figura 2 - Aula ministrada por um dos alunos-professores para os seus pares.



Fonte: Acervo das autoras.

³ O termo professor(es) será doravante substituído por alunos-professores visando informar ao leitor que, apesar de os sujeitos de pesquisa serem diplomados, encontram-se, nesta investigação, em desenvolvimento profissional e, portanto, na condição de alunos-professores.

⁴ Os professores da disciplina e autores desse texto serão denominados por professores-pesquisadores.

⁵ As autoras agradecem a colaboração dos Professores Luciano Lessa Lorenzoni (Ifes) e Hellen Castro de Almeida Leite (UFES) pela participação nas aulas da disciplina de Tópicos Especiais em Educação Matemática: resolução de problemas.

⁶ Entendemos por problemas verbais aqueles que são “formulados por escrito, recorrendo, sobretudo, à linguagem natural, eventualmente permeada por elementos da linguagem própria da matemática” (SOUZA; GUIMARÃES, 2015, p. 137).

⁷ Problemas que não apresentam uma representação mental clara para sua solução (STERNBERG, 2000).

Figura 3 - Problemas planejados pelos quatro grupos de professores.

Problema 1: Meu pai me contou que, em 1938, conversava com o avô dele e observaram que a idade de cada um era expressa pelo número formado pelos dois últimos algarismos dos anos que haviam nascido. Assim, quando meu pai nasceu, qual era a idade do meu avô?

Fonte: <http://www.somatematica.com.br/desafios/desafio76.php>.

Problema 2: Deseja-se descobrir quantos degraus são visíveis em uma escada rolante em movimento. Para isso, foi feito o seguinte: duas pessoas começaram a subir a escada juntas, uma subindo um degrau de cada vez enquanto a outra subia dois degraus de cada vez. Ao chegar ao topo, a primeira pessoa contou 21 degraus enquanto a segunda contou 28. Com esses dados, essas pessoas conseguiram responder à questão: quantos degraus são visíveis nessa escada rolante?

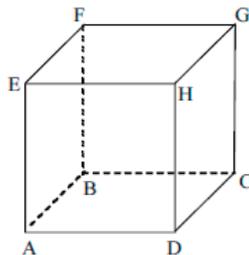
Fonte: <http://www.somatematica.com.br/desafios/desafio12.php>.

Problema 3: Eu tenho 8 pilhas, 4 boas e 4 ruins. Preciso detectar 2 pilhas boas. Eu tenho um rádio que funciona com 2 pilhas boas. Se eu não puder contar com a sorte, qual a quantidade mínima de testes com o rádio que me garantem detectar as duas pilhas boas?

Fonte: Autor desconhecido.

Problema 4: Uma formiga, não voadora, mora na superfície de um cubo maciço com aresta de um metro. Partindo do vértice G em direção ao vértice A, qual a distância mínima percorrida pela formiga?

Fonte: Viana, Sônego e Mendes (2014, p.18-36).



Esse replanejamento deveria estar em sintonia com as teorias apresentadas e discutidas em aula anterior, sobretudo, respeitando os requisitos do planejamento nos moldes de um *Lesson Study*. Esses planejamentos escritos foram recolhidos e o seu processo de construção foi gravado em áudio e vídeo pelas autoras. Vale dizer que nessa etapa os professores-pesquisadores, experientes em *Lesson Study*, participaram, exclusivamente, como observadores dessa reconstrução, visando verificar progressos e quanto os alunos-professores haviam assimilado das teorias estudadas. Não houve, portanto, intervenção dos professores-pesquisadores nessa reconstrução.

A sexta e sétima aulas foram marcadas pela execução das aulas replanejadas, mas agora, para uma turma de quinze licenciandos em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) (Figura 4), doravante denominados alunos-graduandos.

Foi reservado tempo de sessenta minutos para cada aula a ser reexecutada. Essas aulas foram observadas pelos outros alunos-professores em conjunto com os cinco professores-pesquisadores de Matemática, seguidas de avaliação e reflexão por esse grupo de professores sobre pontos discutidos nas teorias, comparando-os com a aula ministrada no segundo e terceiro encontros da disciplina de Tópicos. Por fim, houve debates e reflexões mais profundas a respeito do que haviam assimilado do método como um todo e, em especial, dos planejamentos realizados.

Figura 4 - Aula ministrada por um dos alunos-professores do Ifes aos alunos-graduandos da UFES.



Fonte: Acervo das autoras.

Menciona-se, ainda, que os participantes - alunos-professores e alunos-graduandos da UFES - assinaram termo de consentimento livre e esclarecido para os registros em áudio e vídeo, permitindo a veiculação de suas produções escritas e orais em meios acadêmico-científicos, a fim de se fazer cumprir os princípios éticos em pesquisas científicas. Os nomes dos alunos-professores serão substituídos por codinomes e as imagens de seus rostos estarão esmaecidas.

RESULTADOS E ANÁLISES DO ESTUDO

Neste artigo objetivamos conhecer os progressos apresentados em planejamentos colaborativos e reflexivos para o ensino, contrapostos àqueles eminentemente burocráticos e discutir elementos indicados por autores como devendo ser objeto de atenção por professores em planejamentos, debatendo suas importâncias. Vale destacar que os planejamentos grupais trazem em sua essência discussões e reflexões de contribuições individuais de professores com diferentes experiências, diferentes modos de pensar a sala de aula e bagagens matemáticas diversas.

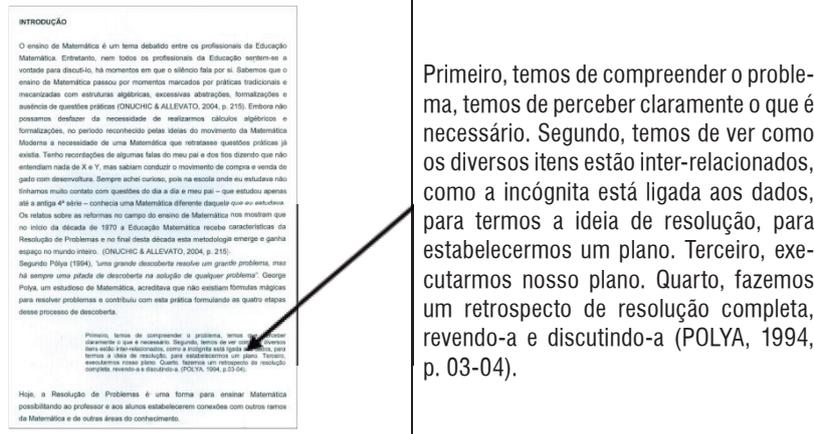
Antes de apresentarmos os resultados e iniciarmos as análises, é útil que se reforce que, embora o estudo tenha sido de um *Lesson Study* completo, o interesse no espaço deste artigo se limitou à investigação de potencialidades para o ensino constantes em planejamento anterior e posterior à aplicação do conhecimento do método *Lesson Study* e outras teorias sobre resolução de problemas e representação mental. Apesar desse recorte, foram realizadas algumas ponderações localizadas nas etapas de (re)execução e (nova)reflexão, sempre que necessárias para explicar a etapa do (re)planejamento. Ademais, pela praticidade e limitação deste texto, nos restringiremos a destacar apenas resultados e análises mais relevantes dos desdobramentos da investigação.

Planejamento do Problema 1

A aluna-professora *Maria* elaborou individualmente apresentou um plano de aula para o problema 1, iniciando com um texto que versava sobre o ensino de Matemática e a resolução de problemas. Esse texto não convergia para a prática da aula, exceto talvez alguma contribuição pela menção dada

pelas heurísticas de Polya (1978) presente na citação (Figura 5), contrariando as indicações de Hill et al. (2011) de que o tempo de aula deve ser consumido majoritariamente com aspectos matemáticos. Esse prólogo foi inócuo por não ter fertilizado nenhuma ideia proposta no plano.

Figura 5 - Aspectos teóricos no planejamento da aluna-professora Maria



Fonte: Acervo das autoras.

Em seguida (Figura 6), *Maria* enunciou o problema escolhido e traçou alguns objetivos, não indicando o nível escolar, os pré-requisitos (SANT'ANNA et al., 1988), a familiaridade dos alunos com o contexto do problema, possíveis obstáculos textuais que prejudicassem a compreensão (SOUZA; GUIMARÃES, 2015), possíveis reações e respostas dos alunos (PONTE, 2014) e múltiplas estratégias (POLYA, 1978). É possível que essas ações estivessem implícitas na mente de *Maria*, mas elas, de fato, não se concretizaram em sua primeira execução de aula, o que reforça a hipótese de ausência de sua providência. Apesar da observação de *Maria* de que todo o material necessário para o desenvolvimento da atividade estará disponível aos grupos no início da aula, a aluna-professora não esclarece qual é esse material.

Houve, por outro lado, preocupação explícita com a interação entre os alunos-graduandos ao prever agrupá-los para a resolução e socialização das soluções, que caracteriza o *neriage*. Igualmente, a previsão de exposição das soluções, bem como suas conexões, se assemelha ao *bansho*, aproximando-se do método japonês *Lesson Study* (FERNANDÉZ; YOSHIDA, 2004). A programação da avaliação foi outro ponto promissor do planejamento (POLYA, 1978), mas careceu de esclarecimentos sobre o que seria efetivamente avaliado - processo de resolução, raciocínio, uso de instrumental matemático, solução pura e simples.

Após explicações sobre planejamentos colaborativos e reflexivos nos moldes de um *Lesson Study*, o grupo de alunos-professores e professores-pesquisadores refletiram sobre a execução do plano individual de *Maria* avaliando aspectos que deveriam ser alterados, enriquecidos ou cancelados. Essa discussão serviria de apoio para o replanejamento da aula sobre o mesmo problema, agora

elaborado em conjunto com alguns dos alunos-professores e observado por professores-pesquisadores sem interferência. Destacamos novas inserções em parte do planejamento na Figura 7.

Figura 6 - Continuação do planejamento da aluna-professora Maria

<p>PROBLEMA ESCOLHIDO</p> <p>Meu pai me contou que, em 1938, conversava com o avô dele e observaram que a idade de cada um era expressa pelo número formado pelos 2 últimos algarismos dos anos que haviam nascido. Assim, quando meu pai nasceu, qual era a idade do meu bisavô?</p> <p>OBJETIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover discussões a partir da situação problema; • Identificar os diferentes caminhos para encontrar a solução; • Aprimorar a capacidade de raciocínio matemático. <p>METODOLOGIA E APRESENTAÇÃO DE MATERIAIS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dividir a turma em grupos pedir que leiam e tentem solucionar a questão fazendo uso dos conhecimentos matemáticos e das etapas de resolução de problemas propostas por Polya; • A solução do problema deverá ser escrita papel branco; • Cada grupo fará sua apresentação e ditará sua solução exposta na sala; • Ao final das apresentações, faremos a análise das soluções encontradas (inclusive a minha que já estará pronta). <p>OBS: Todo material necessário ao desenvolvimento da atividade estará disponível aos grupos no início da aula.</p> <p>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE</p> <p>A avaliação desta atividade acontecerá durante as apresentações das soluções encontradas pelos grupos – incluindo a minha – faremos uma breve reflexão sobre</p>	<p>os conteúdos matemáticos envolvidos, as conexões realizadas e a validação dos caminhos utilizados.</p> <p>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</p> <p>ONICHI, Lourdes de la Rosa. ALLEVATO, Norma Suelly Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: SICUDO, Maria Aparecida Viggiani. BORBA, Marcelo de Carvalho. <i>Educação Matemática: pesquisa em movimento</i>. – São Paulo: Cortez, 2004.</p> <p>POLYA, G. <i>A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático</i>. Rio de Janeiro: Interciência, 1984.</p>
--	--

Dividir a turma em grupos e pedir que leiam e tentem solucionar a questão...

Neriage e bansho

Fonte: Acervo das autoras.

No replanejamento, *Maria* e os alunos-professores preocuparam-se em traçar objetivos e estabelecer o nível escolar para o qual o planejamento se destinava (SANT'ANNA et al., 1988). Contudo, mesmo após o conhecimento sobre elementos importantes recomendados por autores japoneses sobre o *Lesson Study*, os pré-requisitos necessários para solucionar o problema (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) não foram mencionados pelo grupo, além disso, não houve o registro de diferentes soluções matemáticas para o problema.

É possível inferir que: os objetivos traçados demonstraram preocupação por uma solução algébrica válida para o problema; o grupo não declarou os elementos que estimulariam a criatividade dos alunos; e não houve tentativa de busca por diversidade de estratégias de resolução do problema (POLYA, 1978).

Houve, no entanto, preocupação em planejar questionamentos para os alunos-graduandos, bem como prever as possíveis respostas que eles dariam, elementos estes que autores japoneses e, também, Polya (1978) advertem sobre sua importância. Houve, outrossim, registro de lembretes que os orientassem quanto à valorização do trabalho coletivo e dedicação dos alunos-graduandos na participação das aulas. Explicitaram, timidamente, o trabalho grupal, a apresentação das diferentes estratégias de resoluções (*neriage*) e discussão sobre elas (*bansho*). Por último, a avaliação dos alunos-graduandos foi planejada considerando diversos fatores tais como o interesse, a valorização do erro, a participação crítica, aspectos que evidenciam a preocupação do grupo em avaliar não apenas o sucesso dos estudantes na resolução do problema, como propõe Polya (1978).

Figura 7 - Replanejamento do problema 1.

PLANEJAMENTO COLETIVO: _____
 Professora que vai aplicar a aula: _____
 Público: Alunos do curso de Matemática/UFES
 Atividade desenvolvida: Resolução de problemas – Meu pai me contou que, em 1938, conversava com o avô dele e observaram que a idade de cada um era expressa pelo número formado pelos 2 últimos algarismos dos anos que haviam nascido. Assim, quando meu pai nasceu, qual era a idade do meu bisavô?
 Tempo previsto: 60 minutos.

Objetivo	Reações/falas esperadas dos estudantes	Respostas aos questionamentos	Coisas para me lembrar (Professor)	Avaliação
<ul style="list-style-type: none"> Resolver o problema apresentado aplicando corretamente os conceitos matemáticos. Aplicar as etapas de resolução de problemas propostas por Polya. Encontrar uma solução algébrica válida para a questão. 	<ul style="list-style-type: none"> Por onde começaremos? E agora? O problema está completo? Encontramos uma solução que não envolve a álgebra. Ela é válida? Encontramos uma solução algébrica. Está correta? Encontrei um caminho diferente de todos os que foram apresentados! 	<ul style="list-style-type: none"> Você pode criar uma hipótese. Conhece algum problema parecido com este? É preciso definir os cálculos que temos que fazer para descobrir a idade de alguém. É preciso pensar nas características do nosso sistema de numeração decimal. É preciso definir 	<ul style="list-style-type: none"> Valorizar sempre os caminhos válidos e justificáveis; Incentivar a resolução fazendo uso das etapas de Polya: <ul style="list-style-type: none"> ✓ Compreensão; ✓ Estratégias; ✓ Execução; ✓ Verificação. Pedir que os alunos apresentem as soluções encontradas e motivar que os colegas comentem. 	<ul style="list-style-type: none"> Interesse; Participação crítica; Validação da resposta. Valorização do erro. Persistência.
		<p>corretamente a expressão algébrica que representa a idade do pai e a idade do bisavô.</p> <ul style="list-style-type: none"> É preciso fazer uso do conceito de fatoração. O problema está completo. Você saberia justificar a solução que não envolve a álgebra? Você saberia justificar a solução algébrica? Explique para todos nós a solução que você encontrou. Em caso de silêncio estimular a participação do grupo através do diálogo. 		

Fonte: Acervo das autoras.

Planejamento do Problema 2

O segundo problema foi planejado pelo aluno-professor *Marcelo*, que descreveu de forma sucinta as ações a serem executadas. O plano de aula (Figura 8) iniciou com a identificação do aluno-

-professor, da disciplina, do público ao qual se destina e o tempo da aula. Ele registrou em seu plano uso do quadro branco e entrega escrita do problema, que se concretizaram em sua primeira aula, respeitando as ideias clássicas sobre um plano de aula (SANT'ANNA et. al. 1998; HAYDT, 2006).

Não identificamos preocupação com a familiaridade dos alunos ao contexto do problema (POLYA, 1978; PONTE, 2014), possíveis obstáculos textuais que prejudicassem a compreensão (SOUZA; GUIMARÃES, 2015), questionamentos que seriam realizados aos estudantes, tampouco o registro das reações e respostas dos alunos aos questionamentos (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). A ausência desses fatores sugere pouca reflexão com o planejamento.

Figura 8 - Planejamento do aluno-professor Marcelo

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática EDUCIMAT – Cefor – Reitoria	
TÓPICOS ESPECIAIS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	
Prof. Dr ^a . Maria Alice Veiga Ferreira de Souza	
PLANO DE AULA	
1. IDENTIFICAÇÃO	
Professor: [REDACTED]	
Disciplina: Matemática	Data: 31/03/2016
Turma: Licenciatura em Matemática / Mestrado	
Carga Horária: 30 min.	
2. TEMA	
Resolução de Problemas	
3. CONTEÚDO	
Raciocínio Lógico	
4. OBJETIVO GERAL	
Potencializar o aprendizado e Raciocínio Lógico com a utilização do método de Resolução de Problemas.	
5. PROBLEMA	
Deseja-se descobrir quantos degraus são visíveis em uma escada rolante em movimento. Para isso, foi feito o seguinte: duas pessoas começaram a subir a escada juntas, uma subindo um degrau de cada vez enquanto a outra subia dois degraus de cada vez. Ao chegar ao topo, a primeira pessoa contou 21 degraus enquanto a segunda contou 28. Com esses dados, essas pessoas conseguiram responder à questão. Pergunta-se: quantos degraus são visíveis nessa escada rolante? Resposta: 42 degraus.	
6. METOLOGIA	
Utilização da Resolução de Problemas de Pólya.	
7. RECURSOS	
<ul style="list-style-type: none"> • Quadro branco • Problema da escada 	
8. BIBLIOGRAFIA	
PÓLYA, G. <i>Arte de resolver problemas</i> . Rio de Janeiro: Interciência., 1978	

Fonte: Acervo das autoras.

Apesar de não constar registros escritos de sua abordagem inicial, na maioria das vezes *Marcelo* fez uso de questionamentos não amplos para conduzir a compreensão do enunciado, o que é altamente recomendado pelo *Lesson Study*, por exemplo, “Quem chegou primeiro?”. Falhou ao perguntar: “Qual o plano para achar a solução matemática para resolver esse problema?”, considerado genérico, o que não contribui para orientar o raciocínio do aluno (WROBEL et al., 2016).

Quanto às dúvidas dos alunos e estratégias de resolução, *Marcelo* não se preparou para essa diversidade, contrariando o que propõe Polya (1978). Houve apenas o registro do enunciado verbal do problema e do conteúdo matemático, definido como “Raciocínio Lógico”, embora tenha eleito equações lineares para solucionar o problema. Tal confusão entre conteúdos mostra pouco domínio matemático sobre o problema em questão (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Além disso, na execução da aula, *Marcelo* percebeu a dificuldade dos resolvidores pela via das equações. Para isso,

improvisou desenhos e esquemas não planejados. A tentativa se mostrou eficiente, mas não foi definitiva para auxiliar os alunos-professores que estavam a resolvê-lo. O planejamento poderia ter diminuído essas imprevisibilidades inerentes a aulas baseadas em resolução de problemas, ao planejar múltiplas estratégias de soluções, como propõe Polya (1978). Os alunos-professores demonstraram preferir estratégias mentais diversas das de *Marcelo*, confirmando as afirmações de Souza e Guimarães (2015) sobre o fato de os professores deverem estar preparados para ensinar mentes com diferentes modos de pensar.

Após estudos teóricos sobre aulas baseadas em resolução de problema e *Lesson Study*, o replanejamento (Figura 9) foi realizado por *Marcelo* em conjunto com os outros alunos-professores e observados por professores-pesquisadores, assim como ocorreu com *Maria*. Não foram registradas a identificação do público, o tempo da aula, materiais que seriam utilizados, nem o conteúdo a ser abordado no problema. Essa ausência pode ser em decorrência de ele já ter apresentado esses itens em um planejamento anterior, contudo são importantes registros para lembrança e para que demais professores e interessados na aula planejada tenham acesso às informações gerais, a fim de compreenderem o contexto em que aquela aula foi pensada. Lembramos que é prática comum em *Lesson Studies* japoneses a divulgação das aulas planejadas e replanejadas como maneira de melhorar o nível de aulas naquele país.

Figura 9 - Replanejamento para o problema 2.

Objetivos	Questionamentos	Reações / Falas esperadas	Possíveis Respostas	Coisas a lembrar
Potencializar a compreensão de resolução do problema da escada	<ul style="list-style-type: none"> - O que o problema busca responder? - Quais são os dados? - O degrau que Tiago e Camila começaram a contar pode aparecer novamente na escada rolante? 	<ul style="list-style-type: none"> - O que são degraus visíveis? - Como conta-los se a escada está em movimento, ou seja, será que vai chegar algum momento que o degrau que Camila ou Thiago tenha contado não irá reaparecer novamente na contagem? - Sim/ não 	<ul style="list-style-type: none"> Númericos: Thiago andava um degrau por vez e contou 21 no topo. Camila andava dois degraus por vez e contou 28 no topo. Não numéricos: Degraus visíveis; escada está em movimento. Quantidade total de degraus da escada ou os visíveis. 	<ul style="list-style-type: none"> Se o aluno procurar dados numéricos lembrar que existe dados não o numéricos. Dividir os alunos em duplas Ir até os alunos para fazer os questionamentos
Desenvolver um ambiente colaborativo para resolução de problemas	<ul style="list-style-type: none"> - O que podemos fazer para compreender melhor problema? Uma "simulação", um desenho, maquete etc. -Quais são as incógnitas? (o que deseja saber) - O que significa degraus visíveis? - Como são gerados os degraus em uma escada rolante que está subindo? 	<ul style="list-style-type: none"> - podemos desenhar a situação - degraus visíveis 		<ul style="list-style-type: none"> - Relembrar em diferentes momentos da resolução que é uma escada rolante, logo ela está em movimento constante, o que acarretar em sempre gerar novos degraus.

Fonte - Acervo das autoras.

Com relação à formatação do replanejamento, o grupo de *Marcelo* baseou-se na configuração proposta por Fernandez e Yoshida (2004) que correlacionam os objetivos da aula, os questionamentos a serem propostos, reações e respostas esperadas dos estudantes e possíveis ideias a serem lembradas. Essa formatação foi assimilada quando do estudo do método japonês, pois o novo planejamento preocupou-se com aspectos antes não destacados por *Marcelo* e que convergiram para os

pressupostos do *Lesson Study*. Outros objetivos foram incluídos na nova proposta de aula: potencializar a compreensão de resolução do problema (SOUZA; GUIMARÃES, 2015) e construir um ambiente colaborativo próprio do método, o que se confirmou com a divisão dos alunos em duplas e com a descrição dos questionamentos e respostas dos alunos, estabelecendo um ambiente de diálogo em sala de aula.

No novo planejamento, houve indícios de interesse com a elaboração prévia de questionamentos que seriam propostos para os alunos-graduandos, o que é amplamente defendido por autores japoneses, além de Souza e Guimarães (2015), Wrobel et al. (2016) e Polya (1978). Ademais, houve indicação do cuidado com a compreensão dos estudantes acerca do enunciado verbal do problema. Esse fato se confirma por meio de questionamentos registrados no plano de aula, tais como: “O que significa degraus visíveis?” e “Como são gerados os degraus em uma escada rolante que está subindo?”.

O cuidado com a compreensão do problema decorreu-se do fato de que, na primeira execução, os alunos demonstraram dificuldade em solucionar o problema justamente devido aos obstáculos na compreensão. Diante disso, os participantes do replanejamento defenderam que a compreensão do problema era prioridade. Para tal, foi possível identificar a tentativa de abarcar uma considerável quantidade de possíveis dúvidas dos alunos-graduandos e, inclusive, de planejar um desenho que pudesse auxiliar na resolução do problema.

Por fim, não identificamos no replanejamento, bem como no primeiro, sobre quais aspectos os alunos-graduandos seriam avaliados. Em nenhum deles, o grupo de *Marcelo* registrou a resolução escrita planejada para esse problema. Não detectamos, igualmente, preocupação com o compartilhamento de diferentes estratégias de solução (*neriage*) e nem da discussão matemática ou conexão entre as diferentes estratégias (*bansho*). Se bem que, mesmo sem planejar, o aluno-professor *Marcelo*, na reexecução da aula, criou um espaço em que os alunos tiveram oportunidade de compartilhar as suas estratégias, concretizando, de certo modo, o *neriage*.

Planejamento do Problema 3

O primeiro planejamento para o problema 3 da aluna-professora *Sabrina* iniciou descrevendo aspectos teóricos relacionados à Educação Matemática e à Resolução de Problemas que não parecem contribuir para a orientação da aprendizagem dos alunos (Figura 10). É certo que as teorias de ensino são relevantes, mas não em um planejamento explícito de aula, pois se trata da prática da teoria e não de ensino sobre ela.

Sabrina, após a discussão teórica, prosseguiu explicitando o público ao qual se destinava a aula, o tempo previsto e definiu a resolução de problemas como o conteúdo a ser abordado. Na verdade, o objetivo principal da aula não era o de se ensinar a resolução de problemas com base em Polya (1978), mas fazer uso de um problema matemático utilizando as heurísticas. Além disso, tal como *Maria* e *Marcelo*, *Sabrina* não explicitou indicação sobre a familiaridade dos estudantes com o contexto do problema (POLYA, 1978; PONTE, 2014), possíveis obstáculos textuais que prejudicassem a compreensão (SOUZA; GUIMARÃES, 2015) ou previsão de reações e respostas dos alunos aos questionamentos levantados (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Os objetivos da aula versavam sobre a construção de um ambiente propício à resolução de problemas, à exploração de diferentes tipos de representações no processo de resolução e o desenvolvimento da criatividade, da autonomia e do raciocínio dos estudantes, o que não foi totalmente alcançado na prática. Encontramos no planejamento de *Sabrina* indícios de preocupação com a antecipação de diferentes estratégias de solução, o que é incentivado por Polya (1978), Hill et al. (2008) e

Ponte (2014) e autores difusores do *Lesson Study*. A aluna-professora desenvolveu quatro maneiras diferentes para solucionar o problema, sendo duas com uso exclusivo da lógica, uma com o Princípio da Casa dos Pombos⁸ e a última, valendo-se da Análise Combinatória.

Houve atenção para que os resolvedores socializassem suas estratégias de resolução e que as discutissem, o que nos fornece indícios da presença do *neriage* e do *bansho*, além do *looking back*, etapa fortemente recomendada por Polya (1978). Quanto à avaliação, apesar de ter sido mencionada que seria efetuada pela observação dos processos de resolução, não ficou esclarecido como *Sabrina* o faria, se pelos protocolos orais, se por meios escritos ou outro qualquer.

Figura 10 - Aspectos teóricos do planejamento da aluna-professora *Sabrina*.

<p>1- CONTEXTUALIZANDO</p> <p>As mudanças políticas, econômicas e sociais ocorridas ao longo da evolução da humanidade influenciam diretamente no âmbito educacional remetendo o professor à busca por metodologias que viabilizem a transformação da sociedade.</p> <p>A Educação Matemática Crítica tem como ponto crucial a democratização da educação matemática articulando a educação escolar com o contexto social dos estudantes. Skovsmose (1990) distingue três tipos diferentes de conhecimento: o conhecimento matemático em si, o conhecimento tecnológico ligado à aplicabilidade da matemática em problemas e o conhecimento reflexivo referindo-se à natureza dos modelos propondo a reflexão sobre o uso da matemática. Tal diferenciação é pertinente devido ao poder formatador que a matemática exerce na sociedade.</p> <p>Barbosa (2003) enfatiza:</p> <p style="padding-left: 40px;">Se estamos interessados em construir uma sociedade democrática, onde as pessoas possam participar de sua condução e, assim, exercer cidadania, entendida aqui genericamente como inclusão nas discussões públicas, devemos reconhecer a necessidade de as pessoas se sentirem capazes de intervir em debates baseados em matemática (BARBOSA, 2003, p.6)</p> <p>Nesta perspectiva a educação matemática deve reconhecer também a relevância do conhecimento reflexivo. Isso implica na criação de um ambiente de aprendizagem que privilegia o diálogo, a discussão, a investigação e a descoberta de estratégias de resolução. Assim, a metodologia baseada na resolução de problemas contribui para as transformações no campo da matemática que almejamos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:</p> <p style="padding-left: 40px;">Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. (BRASIL, 1998, p.41)</p> <p>O que acontece é que muitas situações-problemas propostas aos estudantes não se caracterizam como problemas desafiadores e interessantes a serem resolvidos. Geralmente reduz-se a aplicação de fórmulas e procedimentos mecanizados que em nada contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e da autonomia. O foco permanece em encontrar uma única resposta, a certa, sem</p>	<p>discutir as diversas possibilidades, os caminhos, tentativas, acertos e erros envolvidos no processo de resolução da questão.</p> <p>Núñez (2004 p. 148) destaca "como características da situação-problema, consideramos a necessidade de representar algo novo na atividade intelectual do estudante e a possibilidade de motivar a atividade deste na tarefa de busca e construção do conhecimento". É preciso promover a integração e o debate no decorrer do processo da resolução do problema, intrigar-se e propor novos questionamentos, novos 'olhares' tornando a sala de aula um espaço democrático onde todos podem expor suas inquietações e pensamentos. Para Van de Walle (2001) a resolução de problemas deve ser o ponto fundamental do currículo de Matemática. Deve-se considerar os conhecimentos prévios dos estudantes promovendo a aquisição e assimilação de novos conhecimentos. Cabe ao professor ficar atento, mediando e motivando os estudantes, isto é, criar um ambiente matemático propício para desenvolver a metodologia da resolução de problemas.</p> <p>Para Dante (1998), o professor deve propor problemas com nível adequado de dificuldades, fazer perguntas para que os estudantes compreendam a questão, encorajá-los a debater sobre os procedimentos e respostas encontrados socializando-os. O diálogo é fundamental em uma aula baseada na resolução de problemas. Para ele é mais difícil ensinar a resolver problemas que ensinar conceitos e algoritmos matemáticos</p> <p>Cabe ressaltar ainda que a resolução de problemas possibilita articular os variados registros de representação semiótica usados em matemática. Duval (2003), afirma que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (Duval, 2003, p. 14). Assim, podemos falar em registro na língua materna, registro figural, registro numérico e registro algébrico. O professor deve trabalhar com mais de uma natureza de registro possibilitando a compreensão do objeto matemático em estudo.</p> <p>As etapas para resolver o problema perpassam as sugeridas por Polya (1978): compreensão do problema, formulação de um plano de ataque, execução do plano e reexame e discussão da solução. O professor assume papel de provocador do conhecimento na medida em que estimula o pensamento matemático com questionamentos como: Qual é a incógnita? Quais ferramentas matemáticas devem ser usadas? Conhece um problema semelhante a esse? Qual o plano para resolvê-</p>
---	--

Fonte: Acervo das autoras.

Após a explicação sobre pressupostos do *Lesson Study* e aulas baseadas em resolução de problemas, *Sabrina* se reuniu com um professor-pesquisador e outros alunos-professores para replanejar sua aula para o mesmo problema. No replanejamento (Figura 11) não identificamos diferenças notórias entre o planejamento inicial e o replanejamento. Assim como o grupo de professores de

⁸ Também conhecido por Princípio das Gavetas de Dirichlet: "Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n-1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos". (MORGADO et al., 2000, p. 81)

atenderam à antecipação dos erros que poderiam ser cometidos pelos estudantes e a preocupação com a previsão de como saná-los.

Foram mantidos o indicativo de compartilhamento de diferentes estratégias (*neriage*) e a discussão matemática sobre elas (*bansho*). Porém, na execução da aula, essas diferentes estratégias não foram expostas como em um painel, descaracterizando a etapa de *bansho*.

Planejamento do Problema 4

O aluno-professor *Robert* elaborou o primeiro planejamento para o problema 4 destacando elementos de identificação para a aula: eixo temático e conteúdo matemático que seria abordado no problema (Figura 12), nos moldes de um planejamento de aula tradicional (Sant’anna et al, 1998). O objetivo da aula estava explícito: “desenvolver o pensamento crítico e reflexivo diante de situações-problemas que envolvem o pensamento geométrico e a utilização do Teorema de Pitágoras”. *Robert* definiu que avaliaria os alunos no decorrer das atividades, mas não registrou de que maneira o faria.

No planejamento de *Robert*, assim como nos planejamentos dos demais alunos-professores, não identificamos preocupação com: a familiaridade dos alunos com o contexto do problema, as dificuldades com o léxico do enunciado verbal, o planejamento de questionamentos que conduzissem a aula, a antecipação das diferentes estratégias e abordagens que poderiam surgir, além de seu compartilhamento. Esses elementos são fortemente recomendados pelas teorias que apoiaram as ações na disciplina de Tópicos (POLYA, 1978; PONTE, 2014, SOUZA: GUIMARÃES, 2015, POLYA, 1978, BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Robert registrou em seu planejamento as competências e habilidades que seriam desenvolvidas em sua aula, o que é sugerido por autores japoneses, entre elas, estabelecer relações, visualizar, explorar e investigar. Apesar de recomendadas, o plano de *Robert* não esclarece como serão levadas a cabo em sua aula.

Figura 12 - Primeiro planejamento do aluno-professor *Robert*.

Competências:
Visualizar e estabelecer relações no hexaedro;
Reconhecer a possibilidade de utilização do Teorema de Pitágoras durante a resolução do problema;
Desenvolver o pensamento crítico a partir de situações que requerem observação, exploração e investigação.

Habilidades:
Visualizar, explorar e investigar.

→

PLANO DE AULA	
IDENTIFICAÇÃO	
Tema:	
Professor:	
Área de Conteúdo Matemático:	Geometria - Resolução de Problemas
Letramento:	
Tempo estimado de cada aula:	Número de aulas previstas: 1
Esta Unidade:	Três de Tópicos
Conteúdo:	Teorema de Pitágoras
OBJETIVO	
Desenvolver o pensamento crítico e reflexivo diante de situações-problemas que envolvem o pensamento geométrico e a utilização do Teorema de Pitágoras.	
HABILIDADES E COMPETÊNCIAS	
Competências:	
<ul style="list-style-type: none"> • Visualizar e estabelecer relações no hexaedro; • Reconhecer a possibilidade de utilização do Teorema de Pitágoras durante a resolução do problema; • Desenvolver o pensamento crítico a partir de situações que requerem observação, exploração e investigação. 	
Habilidades:	
<ul style="list-style-type: none"> • Visualizar, explorar e investigar. 	
DESENVOLVIMENTO	
1ª AULA (20 minutos)	
O desenvolvimento desta aula partir-se-á em um planejamento de “Estudando pelo Resolvido de Problemas”, texto escrito por John A. Van de Walle. Partindo, inicialmente em três em momentos distintos, a saber: <i>desenvolver, observar e explicar</i> .	
No decorrer, uma discussão de 5 minutos, sobre questões de natureza descritiva:	
<ul style="list-style-type: none"> • Visualizar as as estruturas geométricas do problema, produzindo por meio de um problema está geométrico; • Identificar em qual; • Refletir que as relações entre geometria e álgebra são; • Indicar as operações usadas a partir da resolução do problema. 	

“No decorrer, uma discussão de 5 minutos, e o momento de resolver o problema. Não se esqueça de avaliar no decorrer, é sempre em um momento, de modo claro e com um texto escrito em linguagem e na elaboração de questões.

Por fim, a fase de desenvolvimento na apresentação dos sujeitos encontrados para o problema, possibilidade de discutir e justificar suas respostas e estratégias. Três discussões de 10 minutos.

Obs: O tempo estimado para as aulas são aproximadamente quando se chega ao texto de investigação para o problema. Portanto, não considerar que as aulas devam ser feitas apenas contemplando a duração de 20 minutos de discussão durante a resolução.

Qual problema será investigado?

Problema 10. Uma formiga, que viajava, teve a importância de ser sobre um cubo (veja a figura de um cubo). Para ir do vértice O ao vértice oposto A, a formiga vai percorrer qual distância mínima?



AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados ao decorrer de cada aula.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Quadro branco;
- Lâminas;
- Papel A4.

REFERÊNCIAS

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no Ensino Fundamental. Formação de professores e aprendizagem de matemática. Artmed, 2006. 412 p. R\$ 42,90.

ANEXO

Não possui!

CONTRATO DIDÁTICO

Não possui!

Fonte: Acervo das autoras.

Em sintonia com pressupostos do *Lesson Study*, *Robert* preocupou-se com a participação dos alunos-graduandos na resolução do problema proposto, por meio do compartilhamento de suas

compreensões sobre o enunciado do problema. Além disso, houve programação de que as estratégias encontradas pelos alunos-graduandos seriam apresentadas e discutidas por todos, o que nos dá indícios do desejo de praticar ações que se assemelham ao *neriage* e *bansho*.

Ao replanejar o problema, o grupo repetiu elementos como identificação gerais, objetivo da aula, competências e habilidades e a maneira de os avaliar sem progresso, apesar da discussão sobre planejamento à luz do método *Lesson Study*.

A aula foi redimensionada em três fases: “discussão inicial”, “investigando e resolvendo” e “discussões finais”. No interior de cada fase foram descritos questionamentos aos alunos e suas possíveis respostas, como sugerem Ball, Thames e Phelps (2008). A amplitude da pergunta “Qual(ais) o(s) seu(s) receio(s) em relação a um problema de matemática?” não parece contribuir para a solução do problema, ao contrário da previsão de questionamentos sobre termos presentes no enunciado que poderiam se constituir em potenciais obstáculos à compreensão. Decidiram alterar o texto do problema sinalizando preocupação com a compreensão do enunciado, como preconizam Souza e Guimarães (2015). Além disso, registraram palavras e seus significados dentro do contexto do problema e planejaram exibir imagens relacionadas a elas em um projetor (Figura 13).

Diferentemente do primeiro planejamento, o grupo de *Robert* se preocupou em propor o problema para os alunos-graduandos instaurando um ambiente de diálogo em sala de aula (FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004; ISODA; OLFOS, 2009), o que se confirmou em sua execução. Além disso, esse grupo de alunos-professores registrou possíveis questionamentos para conduzir o raciocínio dos alunos-graduandos (POLYA, 1978): “De quais maneiras a formiga pode caminhar no cubo?”, “Vocês compreenderam a solução do problema?”. As respostas e reações dos alunos também foram previstas: “Saindo do ponto G e percorrendo a aresta GC e CD, obteremos 2m”. Essas ações foram consideradas um progresso do primeiro para o segundo plano de aula. No replanejamento também consta antecipação às diferentes estratégias de solução para o problema (Figura 14).

Figura 13 - Recorte do segundo planejamento do aluno-professor *Robert*.

PLANO DE AULA	
IDENTIFICAÇÃO	
Título:	
Professor:	
Assunto:	Geometria – Resolução de Problemas
Temática:	
Tempo Estimado:	1 hora e 30 minutos
Outros:	
Conteúdo:	Geometria – Resolução de Problemas
OBJETIVO	
Investigar e planejar a aula e o plano de aula de matemática que se constitui o planejamento didático a ser aplicado em sala de aula de Matemática.	
HABILIDADES E COMPETÊNCIAS	
<ul style="list-style-type: none"> • Construir um problema de matemática. • Avaliar a possibilidade de aplicação da Teoria de Polya em sala de aula de matemática. • Desenvolver e apresentar o plano de aula de matemática que se constitui o planejamento didático a ser aplicado em sala de aula de Matemática. 	
HABILIDADES	
<ul style="list-style-type: none"> • Construir, explicar e apresentar. 	
DESENVOLVIMENTO	
F AULA INICIAL	
<p>Uma aula de matemática é um momento de aprendizagem, onde o aluno aprende a resolver problemas de matemática. O professor deve planejar a aula de matemática de acordo com o conteúdo a ser abordado, considerando o conhecimento prévio dos alunos e o contexto da sala de aula.</p>	
OBJETIVOS INICIAIS	
<p>Investigar e planejar a aula e o plano de aula de matemática que se constitui o planejamento didático a ser aplicado em sala de aula de Matemática.</p>	

Uma formiga, não voadora, mora no topo de um cubo formado por arestas de um metro. Partindo de vértice G, em direção ao vértice A, qual a distância mínima percorrida pela formiga?

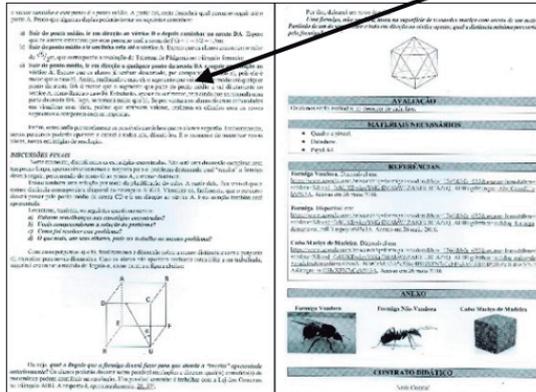
A seguir, você verá que se deve considerar um plano e a distância a ser percorrida pelo problema. Investiga e planeja a aula e o plano de aula de matemática que se constitui o planejamento didático a ser aplicado em sala de aula de Matemática.

- 1) Palavra “não voadora”: Explicarei que existem formigas (ver imagem em anexo) que possuem asas e que podem, portanto, realizar pequenos voos. No caso do problema, ela não possui asas e lhe resta, então, caminhar sobre o cubo;
- 2) Palavra “topo”: Apesar dessa palavra ser conhecida por muitos de nós, alguns alunos podem desconhecer o que seria um sólido maciço. Para tanto, utilizarei o exemplo de um cubo de madeira (ver imagem em anexo) para explicar que um sólido maciço é aquele que não possui partes ocas, cujos componentes no seu interior são bem unidos, denso ou espesso. Em contrapartida, apresentarei que o maciço é, por sua vez, oco;
- 3) Palavra “aresta, vértice”: Adotarei a própria imagem do problema para exemplificar que aresta é a reta resultante do encontro de duas faces (região plana) e que vértice é formado pelo encontro de duas arestas.

- a) **Palavra “não voadora”**: Explicarei que existem formigas (ver imagem em anexo) que possuem asas e que podem, portanto, realizar pequenos voos. No caso do problema, ela não possui asas e lhe resta, então, caminhar sobre o cubo;
- b) **Palavra “maciço”**: Apesar dessa palavra ser conhecida por muitos de nós, alguns alunos podem desconhecer o que seria um sólido maciço. Para tanto, utilizarei o exemplo de um cubo de madeira (ver imagem em anexo) para explicar que um sólido maciço é aquele que não possui partes ocas, cujos componentes no seu interior são bem unidos, denso ou espesso. Em contrapartida, apresentarei que o maciço é, por sua vez, oco;
- c) **Palavra “aresta, vértice”**: Adotarei a própria imagem do problema para exemplificar que aresta é a reta resultante do encontro de duas faces (região plana) e que vértice é formado pelo encontro de duas arestas.

Fonte: Acervo das autoras.

Figura 14 - Outro recorte do segundo planejamento do aluno-professor Robert.



a) **Sair do ponto médio, ir em direção ao vértice D e depois caminhar na aresta DA:** Espero que os alunos entendam que esse percurso será a soma de $(1/2) + 1 = 3/2 = 1,5m$;

b) **Sair do ponto médio e ir em linha reta até o vértice A:** Espero que os alunos encontrem o valor de $\sqrt{5}/2m$, que corresponde a resolução do Teorema de Pitágoras no triângulo formado;

c) **Sair do ponto médio, ir em direção a qualquer ponto da aresta DA e seguir em direção ao vértice A:** Espero que os alunos já tenham descartado, por comparação, o caso a), pois ele é maior que o caso b). Assim, analisando o caso c), o segmento que vai do ponto médio e vai diretamente ao vértice A, como ilustra o caso b). Entretanto, apesar de menor, terá ainda que ser somada uma parte da aresta DA, logo, se tornará maior que b). Se por ventura os alunos tiverem dificuldades em visualizar essa ideia, pedirei que atribuam valores, realizem os cálculos com os novos segmentos e comparem com as

Fonte: Acervo das autoras.

Como continuidade ao trabalho com o problema inicial, o grupo planejou propor problemas similares com níveis mais elevados de dificuldades, cumprindo recomendações de Polya (1978).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O *Lesson Study* é um método de ensino apoiado em ações colaborativas de planejamento, execução e reflexão sobre aulas de Matemática. Nosso olhar, nesse texto, foi direcionado para a etapa de planejamento visando investigar progressos entre planos tradicionalmente escritos por professores de Matemática e outros construídos colaborativamente nos moldes de um *Lesson Study* e de indicações de autores da Educação Matemática. Nesse ínterim, buscamos destacar elementos considerados relevantes por essa teoria e autores que justificassem (por que?) e explicassem (como?) a presença do que se deve constar em planos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de Matemática.

De maneira geral, a investigação mostrou que a apresentação e discussão sobre o tema contribuiu para alguns avanços no planejamento de aulas, sobretudo com a preocupação pelos alunos-professores sobre a compreensão dos enunciados, previsão de questionamentos e possíveis respostas e reações pelos alunos-graduandos, integração e compartilhamento das resoluções (*neriage* e *bansho*). A antecipação às respostas dos estudantes aos questionamentos dos professores, antecipação às possíveis dúvidas e dificuldades, as explicações que seriam fornecidas aos estudantes, bem como o planejamento de diversas estratégias de solução que envolvam diferentes representações só se fizeram presentes após as ações colaborativas e reflexivas realizadas antes/durante o planejamento conjunto. Muitas dessas ações só foram possíveis devido à multiplicidade de olhares e experiências próprias de cada um dos professores em um cenário colaborativo e reflexivo promovido pelo método *Lesson Study*.

Além dessas, os alunos-professores passaram a valorizar o trabalho coletivo de seus aprendizes, promovendo um ambiente de diálogo em sala de aula, ao criar espaço para que os alunos-graduandos pudessem realizar discussões matematicamente satisfatórias. Não houve, todavia, atenção por todos os alunos-professores a outros itens igualmente importantes, como a conexão de múltiplas estratégias e descrição da avaliação dos desempenhos dos alunos.

Esse resultado leva a crer que o replanejamento se revela, de fato, como um processo, confirmando a *Espiral do Lesson Study* e que, dificilmente, ele atingiria sua plena elaboração com apenas uma aula teórica sobre o tema. É indicado, talvez, que pessoas experientes nas diretrizes dadas pelos autores mencionados nesse artigo possam intervir, acelerando o processo de aprendizagem dos alunos-professores nesse sentido, tal como é realizado nas escolas japonesas. A prática da *Espiral do Lesson Study* poderia proporcionar, também no caso brasileiro, os progressos nos replanejamentos ao experimentarem, a cada reedição, os sucessos e fracassos obtidos na execução de ações planejadas, guardadas as especificidades culturais e educacionais existentes. Somente uma investigação nos responderia.

Para além dos fatores relatados, verificamos que o planejamento colaborativo é uma via valiosa para planejar aulas baseadas em resolução de problemas por serem marcadas por imprevisibilidades. Os profissionais docentes interessados em aulas baseadas em resolução de problemas poderão, em conjunto, se antecipar aos possíveis acontecimentos de uma aula, fornecer explicações matematicamente corretas, propor problemas em sintonia com os objetivos estabelecidos para aqueles estudantes, bem como elaborar questionamentos que não criem bloqueio no fluxo de raciocínio dos alunos.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só)... In: **Educação e Matemática**, 8. Lisboa: APM, p. 7-10, 1989.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R.. Ensino aprendizagem avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, n. 35, 2014.

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. In: **Simpósio Brasil-Japão**, 9., 2009, São Paulo. Disponível em: <<https://goo.gl/LgmG1M>>. Acesso em: 12 mai. 2016.

BALL, D. L.; BASS, H. Making mathematics reasonable in school. In: J. Kilpatrick; W. G. Martin; D. Schifter (Ed.). **A research companion to Principal and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 27-44, 2003.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special. **Journal of Teacher Education**, v.50, n.1, p. 389-407, 2008.

FERNANDEZ, C; YOSHIDA, M. **Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning**. New Jersey, EUA: Autores Associados; 2004.

FUJII, T. Implementing japanese lesson study in foreign countries: misconceptions reviewed. **Mathematics Teacher Education and Development**, v.16, n. 1, p. 2-18, 2014.

HAYDT, R. C. **Curso de didática geral**. São Paulo: Ática. 2006.

HILL, H. C. et al. Measuring the Mathematical quality of instruction: learning mathematics for teaching project. **Journal for Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 1, p. 25-47, 2011.

ISODA, M. Lesson Study: Japanese Problem Solving Approaches. Trabalho apresentado à Conference on Reaplicating Exemplary Practices in Mathematics Education, Koh Samui, 2010.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases**. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J., FINDELL, B. (Ed.). **Adding it up: Helping children learn mathematics**. Washington, DC: National Academy Press, 2001.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 33. ed. São Paulo: Cortez, 1994.

MORGADO, A. C. de O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P.. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática, ed. 9. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 81p.

NEIRA, M. G. **Por dentro da sala de aula: conversando sobre a prática**. São Paulo: Phorte Editora, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. Formação do professor de Matemática: perspectivas atuais. In: J. P. Ponte (Org.), **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 343-360, 2014.

SANT'ANNA, F. M. et al. **Planejamento de ensino e avaliação**. 11. ed. Porto Alegre: Sagra, 1998.

SCHOENFELD, A. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In: P. Abrantes, L. C. Leal, J. P. Ponte (Ed.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, p. 61-72, 1996.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. **Quadrante**, v. 24, n. 2, p. 135-162, 2015.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre, RS: Artes Médicas. 2000.

TAKAHASHI, A. Characteristics of japanese mathematics lessons. **Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics**, v. 25, p. 37-44, 2006.

VANDENBOS, G. R. (Org.). **Dicionário de Psicologia**. Tradução de Daniel Bueno, Maria Adriana Veríssimo Veronese e Maria Cristina Monteiro. Porto Alegre: Artmed, 2010.

VIANA, A.; SÔNEGO, D.; MENDES, R. Coragem, estúpido! **Revista Cálculo**, ano 4. n. 40. Editora segmento, São Paulo, SP. p. 18-36, 2014.

WROBEL, J. S. et al. Inquiries in Problem Solving with Contributions from Lesson Study. In: 40th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, 2016, Szeged. **Proceedings of the 40th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education**, v. 1. p. 341, 2016.

RECEBIDO EM: 02 mar. 2017.

CONCLUÍDO EM: 03 jun. 2017 .

