

ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN Y LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA DE UN LIBRO DE TEXTO

ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL ORGANIZATION OF FUNCTION AND DIRECT PROPORTIONALITY OF A TEXTBOOK

EDERD QUENTASI MAMANI*
FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA**

RESUMEN

Este artículo presenta los resultados de una investigación en la que se ha analizado un libro de texto de matemáticas del primer grado de educación secundaria del Perú. El objetivo del análisis fue identificar la organización matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa. El referente teórico utilizado es la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard. La investigación es de carácter cualitativo y de tipo bibliográfico. Este artículo muestra que la organización matemática en torno a los ejemplos del libro de texto analizado está formada por 7 tipos de tareas, 13 tareas, 12 técnicas, 18 elementos tecnológicos y 2 teorías.

Palabras-clave: Organización matemática. Función. Proporcionalidad directa.

ABSTRACT

This paper presents the results of a research in which a math textbook for high-school freshmen in Peru was analyzed. The aim of the analysis was to identify the mathematical organization of the unit containing the topics of function and direct proportionality. The theoretical referent used is the Anthropological Theory of the Didactic by Chevallard. It is a bibliographical, qualitative investigation. This paper shows that the mathematical organization surrounding the examples of the analyzed textbook is composed by 7 types of tasks, 13 tasks, 12 techniques, 18 technological elements, and 2 theories.

Keywords: *Mathematical organization. Function. Direct proportionality.*

* Magister en Enseñanza de las Matemáticas - Institución Educativa Fe y Alegría 27 de Macarí. E-mail: ederdqm@gmail.com

** Doctor en Matemáticas - Pontificia Universidad Católica del Perú (Proyecto DGI: 0030-2014). E-mail: fugarte@pucp.edu.pe

INTRODUCCIÓN

Según el Diseño Curricular Nacional de la educación básica regular del Perú (PERÚ, 2009), vigente hasta el año 2016, la proporcionalidad directa se estudia desde el quinto grado de educación primaria hasta el segundo grado de educación secundaria, mientras que la noción de función se aborda desde el primero al quinto grado de educación secundaria, es decir, estos dos objetos matemáticos ocupan un lugar importante en la formación de los estudiantes de la educación básica regular del Perú. Sin embargo, los resultados de la evaluación censal de estudiantes (PERÚ, 2016) tomado a los alumnos del segundo grado de educación secundaria por el Ministerio de Educación del Perú afirma que dichos estudiantes tienen dificultades en la comprensión de la función lineal y lineal afín.

Para intentar comprender este fenómeno, con el fin de plantear algunas sugerencias, realizamos un análisis de la organización matemática presente en la unidad de Funciones y álgebra del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria, distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación del Perú en el año 2012. Dicho libro de texto se usa como material didáctico del área de matemática por los profesores y estudiantes de las instituciones educativas secundarias públicas del Perú.

La importancia del libro de texto como material educativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática ha sido señalada en diversas investigaciones, por ejemplo (Cordero & Flores, 2007). Para Alajmi (2012), citado por Maz & Rico (2015), los libros de texto influyen en lo que los profesores enseñan, en cómo lo enseñan y en las tareas que proponen a sus estudiantes. Aunque, algunos libros de texto muestran limitaciones en su organización matemática, pues las actividades que estas presentan no son las más adecuadas para los estudiantes, las tareas propuestas se resuelven con una sola técnica porque existe una escasa presencia del bloque tecnológico-teórico.

TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

La teoría que fundamenta este trabajo es la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante, TAD. Dicha teoría fue desarrollada por Chevallard (1999) y complementada por las investigaciones de Bosch (1994), Fonseca (2004), García (2005), Lucas (2010), Ruiz-Monzón (2010) y Serrano (2013). Se utiliza la TAD porque proporciona herramientas para estudiar los objetos matemáticos en los libros de texto, ya que el objeto primario de investigación en esta teoría es el análisis de la actividad escolar matemática con sus relaciones humanas enmarcadas en ciertas instituciones sociales.

Según Chevallard (1999), la TAD sitúa la actividad matemática y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Además, plantea que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología.

Asimismo, de acuerdo con Lucas (2010), el sistema formado por los dos bloques, o cuatro componentes, constituye una praxeología u organización matemática que se considera la unidad mínima en que puede ser descrita la actividad matemática, como sugiere el esquema que sigue:

Tabla 1 - Componentes de una organización matemática.

Componentes	Bloque	Tipo de saber
Tarea	Práctico-técnico (Praxis)	Saber hacer
Técnica		
Tecnología	Tecnológico-teórico (Logos)	Saber
Teoría		

Fuente: Adaptado de Lucas (2010, p. 25).

A continuación, se desarrolla cada uno de los componentes de una organización matemática.

a) Tipos de tareas (T)

Un tipo de tarea es un conjunto de uno o más tareas. Una tarea propiamente dicha es una acción que debe ser hecha por alguien, en la mayoría de los casos son definidas por un verbo.

b) Técnica (τ)

Una técnica es la manera de realizar una determinada tarea, es el método por el cual se realizan las tareas. La técnica es un saber-hacer y forma conjuntamente con la tarea el bloque práctico-técnico de una organización matemática.

c) Tecnología (θ)

Para Chevallard, Bosch & Gascón (2005), una tecnología es un discurso matemático que justifica y permite entender cierta técnica. La tecnología permite describir, explicar y justificar por qué una técnica funciona, son los conocimientos matemáticos que justifican la técnica. Las definiciones, axiomas y teoremas son tecnologías que validan la técnica. Además, si se manejan adecuadamente, puede originar nuevas técnicas.

d) Teoría (Θ)

De acuerdo con Chevallard et al. (2005), en primer lugar, hay que decir que a la tecnología de la tecnología la llamamos una teoría, la teoría de la técnica. En ese sentido, según estos autores, la teoría justifica y explica las afirmaciones de la tecnología, es decir es el discurso racional sobre la tecnología. Ella tiene, en relación a la tecnología, el mismo papel que esta tiene en relación a la técnica, la teoría es quien justifica, explica y genera tecnologías y posibilita interpretar técnicas y probar tecnologías. La teoría viene a ser el campo matemático que justifica a las tecnologías.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En la investigación realizada, se ha usado como herramientas los componentes de una organización matemática que propone Chevallard (1999). Es decir, se han utilizado los tipos de tareas, las tareas asociadas a cada tipo de tarea, las técnicas, las tecnologías y las teorías. Esta herramienta ha permitido construir una organización matemática de los ejemplos de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa del libro de texto seleccionado.

Para realizar la investigación se han seguido las sugerencias de Chevallard (1999) y Almouloud (2015) que se listan a continuación:

- *Identificar los tipos de tarea y las tareas asociadas a cada tipo:* para ello se ha analizado los ejemplos que el libro de texto propone en la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa. Para lo cual, primero se identifica las tareas en el libro de texto y luego dichas tareas se clasifican en tipos de tareas.

- *Identificar las técnicas que usa el libro de texto para realizar las tareas:* aquí se identifican las técnicas con que se resuelven las tareas.

- *Identificar las tecnologías que justifican las técnicas identificadas:* aquí se identifica el conocimiento matemático que se moviliza para realizar la tarea. Por lo tanto, justifica la técnica empleada para resolver la tarea.

Para recoger información sobre la organización matemática que presenta el libro de texto analizado hemos utilizado los trabajos de Hurtado & Zúñiga (2011) y Mayorga (2013) quienes recogen información usando la siguiente tabla:

Tabla 2 - Organización matemática del libro de texto.

Bloque practico-técnico (praxis)			Bloque tecnológico-teórico (logos)	
Tipos de tareas (T)	Tareas (t)	Técnicas (τ)	Tecnologías (θ)	Teorías (Θ)
¿Cuáles son los tipos de tareas propuestas en el texto?	¿Cuáles son las tareas que pertenecen a un determinado tipo de tarea?	¿Cuáles son las técnicas que justifican las tareas presentadas en el libro de texto?	¿Cuáles son las tecnologías que justifican las técnicas aplicadas en el libro de texto?	¿Cuáles son las teorías que justifican las tecnologías presentes en el libro de texto?
T_1	$t_{1,1}$	$\tau_{1,1}$	θ_1	Θ_1
	$t_{1,2}$	$\tau_{1,2}$	θ_2	
	$t_{1,3}$	$\tau_{1,3}$	θ_3	
T_2	$t_{2,1}$	$\tau_{2,1}$	θ_4	Θ_2
	$t_{2,2}$	$\tau_{2,2}$	θ_5	
	$t_{2,3}$	$\tau_{2,3}$	θ_6	

Fuente: Quentasi (2015, p. 77).

Entre otras cosas la tabla 2 mostrará los tipos de tareas, las tareas, la tecnología y la teoría que componen la organización matemática identificada de los ejemplos que propone el libro de texto sobre funciones y proporcionalidad directa. Esta tabla ha sido completada durante el proceso de identificación de los elementos de la organización matemática del libro de texto seleccionado.

Evaluar la organización matemática

En este apartado se describe cómo debe evaluarse los tipos de tareas, técnicas y tecnologías que componen la organización matemática. Para ello, Chevallard (1999) propone algunos criterios que pueden ser considerados.

Evaluar los tipos de tareas

Para evaluar los tipos de tareas y las tareas asociadas a cada tipo, Chevallard (1999), sugiere los siguientes criterios:

- *criterio de identificación:* los tipos de tareas T , ¿están claramente *despejados* y bien identificados? En particular, ¿están representadas por los corpus K_j efectivamente disponibles de especímenes suficientemente

numerosos y adecuadamente calibrados? ¿O, al contrario, no son conocidos más que por algunos especímenes poco representativos?

- *criterio de las razones de ser*: las *razones de ser* de los tipos de tareas T_i , ¿están explicitadas? ¿O al contrario, estos tipos de tareas aparecen desmotivados?

- *criterio de pertinencia*: los tipos de tareas considerados ¿proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas? ¿Son pertinentes en la visión de las necesidades matemáticas de los alumnos, para hoy en día? ¿Para mañana? ¿O al contrario aparecen como “aisladas” sin relación verdadera -o explícita- con el resto de la actividad (matemática y extramatemática) de los alumnos?

Evaluar las técnicas

De acuerdo, con Chevallard (1999) la evaluación de las técnicas supone los mismos criterios que se han usado para evaluar los tipos de tareas. Además, se debe responder a las siguientes preguntas: las técnicas propuestas ¿se elaboran efectivamente, o solamente se bosquejan? ¿Son fáciles de utilizar? ¿Su alcance es satisfactorio? ¿Su fiabilidad es aceptable dadas unas condiciones de empleo? ¿Son suficientemente inteligibles? ¿Tienen futuro y pueden evolucionar de manera conveniente?

Según Quentasi (2015), el alcance de una técnica consiste en que con ella se puede hacer la mayor cantidad de tareas existentes en la organización matemática. Mientras que, la fiabilidad se refiere al buen funcionamiento de la técnica, en otras palabras, la técnica debe ofrecer seguridad y buenos resultados. Decimos que una técnica es inteligible cuando ella es entendible.

Evaluar las tecnologías

Según Chevallard (1999), se pueden hacer observaciones análogas a las anteriores a propósito del bloque tecnológico-teórico. Así, dado un enunciado, ¿se plantea únicamente el problema de su justificación? ¿O bien se considera tácitamente este enunciado como evidente, natural, o incluso bien conocido (“folklorico”)? Las formas de justificación utilizadas, ¿son parecidas a las formas canónicas en matemáticas? ¿Se adaptan a sus condiciones de utilización? ¿Se favorecen las justificaciones explicativas? ¿Se explotan efectivamente y de forma óptima los resultados tecnológicos disponibles?

EL LIBRO DE TEXTO ANALIZADO

El libro de texto *Matemática 1 Secundaria* (PERÚ, 2012) que analizamos ha sido elaborado por el Departamento Editorial del Grupo Norma del Perú. Fue publicado en abril del 2012 y se han impreso 617 094 ejemplares. Este libro de texto tiene un total de 254 páginas. El Ministerio de Educación del Perú los distribuyó a los estudiantes del primer grado de Educación Secundaria en el año escolar 2012 como material didáctico a usarse en las instituciones educativas públicas del Perú.

La unidad 5 del libro de texto tiene como título *Funciones y álgebra*. Contiene los siguientes temas: funciones, proporcionalidad y ecuaciones. Esta unidad tiene un total de 30 páginas de las cuales 17 páginas corresponden a funciones y proporcionalidad directa.

El primer tema está referido a las funciones, inicia presentando el producto cartesiano de dos conjuntos y se pone énfasis en la noción de relación binaria. A continuación, se da la definición de función. Luego, se define la variable independiente y dependiente. Después, explica la representación tabular y gráfica de una función. En seguida, se define dominio y rango de una función. Finalmente, se estudia la gráfica de funciones,

en ella se da las condiciones para que una relación sea una función y se hace hincapié en la representación gráfica sagital y en la representación cartesiana de la función.

El tema 2 está referido a la proporcionalidad. En este tema se aborda la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa. Se comienza el tema con una situación problema donde se usa la proporcionalidad directa. A continuación, se da la definición de la proporcionalidad directa y de la proporcionalidad inversa.

La unidad concluye con la evaluación de la misma. Para realizar la heteroevaluación se propone al estudiante nueve ejercicios sobre los temas abordados a lo largo de la unidad. En seguida se realiza la autoevaluación y la coevaluación; en ambos caso se hace uso de una escala tipo Likert. Luego, se realiza la metacognición, en ella se reflexiona sobre lo trabajado en la unidad.

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DEL LIBRO DE TEXTO ANALIZADO

A partir de las tareas y las técnicas que el libro de texto analizado propone, para ilustrar la función y la proporcionalidad directa, se construye la organización matemática de la unidad denominada como funciones y álgebra, y determinamos las tareas del libro de texto que puede resolver un estudiante con las técnicas presentadas. En seguida, se presenta el número de ejemplos y ejercicios sobre la función y la proporcionalidad directa de la unidad de funciones y álgebra del libro de texto seleccionado.

Tabla 3 - Ejemplos del libro de texto analizado.

Temas	Funciones	Proporcionalidad directa	Total
Ejemplos	24	01	25
Ejercicios	90	23	113

Fuente: Quentasi (2015, p. 79-81).

En la tabla 3 se observa que, la unidad 5, del libro de texto analizado, tiene un total de 25 ejemplos, de los cuales 24 son de funciones y uno es de proporcionalidad directa. Se toma estos 25 ejemplos para construir una organización matemática de la función y de la proporcionalidad directa.

TIPOS DE TAREAS Y SUS TAREAS ASOCIADAS

En la siguiente tabla se presenta los tipos de tareas y las tareas asociadas a cada tipo.

Tabla 4 - Tipos de tareas y tareas.

Tipos de tarea	Tarea
T ₁ : Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes.	t _{1,1} : Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de un enunciado verbal.
T ₂ : Representar relaciones binarias.	t _{2,1} : Representar relaciones binarias como un conjunto de pares ordenados.
	t _{2,2} : Representar relaciones binarias como diagramas sagitales.
	t _{2,3} : Representar relaciones binarias como gráficos cartesianos.
T ₃ : Identificar variables de una función.	t _{3,1} : Identificar variables independiente y dependiente en una situación matemática.
T ₄ : Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.	t _{4,1} : Reconocer funciones a partir de gráficos cartesianos.
	t _{4,2} : Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.
	t _{4,3} : Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.
T ₅ : Determinar el dominio y rango de funciones.	t _{5,1} : Determinar el dominio y rango de funciones de un conjunto de pares ordenados.
T ₆ : Representar una función lineal afín.	t _{6,1} : Representar tabular y gráficamente una función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.
	t _{6,2} : Representación tabular y sagital de función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.
	t _{6,3} : Representar una función lineal afín como un conjunto de pares ordenados dado la regla de correspondencia.
T ₇ : Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales.	T _{7,1} : Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales sobre situaciones extramatemáticas.

Fuente: Quentasi (2015, p. 142).

La tabla 4, muestra que en los ejemplos del libro de texto analizado se ha identificado 7 tipos de tareas y 13 tareas asociadas a los diferentes tipos de tareas. De otro lado, se observa que solo existe un tipo de tarea sobre proporcionalidad directa y seis tipos de tareas sobre función. Es decir, 12 tareas de funciones y una tarea sobre proporcionalidad directa. Esto quiere decir que hay 24 ejemplos desarrollados sobre funciones y solo un ejemplo desarrollado sobre la proporcionalidad directa. Existe una escasez de tareas sobre la proporcionalidad directa. Esto evidencia que el libro de texto brinda más importancia al objeto matemático función y deja relegada a la proporcionalidad directa. Lo que muestra que los tipos de tareas no cumple el criterio de pertinencia propuesto por Chevallard (1999), pues no proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas vinculadas con la función y la proporcionalidad directa. Asimismo, no son pertinentes en la visión de las necesidades matemáticas de los estudiantes, puesto que un solo ejemplo sobre la proporcionalidad directa no es suficiente para que los estudiantes puedan hacer las tareas que se proponen en las actividades y en las evaluaciones del libro de texto analizado. De otro lado, los tipos de tareas sobre función y proporcionalidad directa aparecen “aisladas” sin relación con el resto de la actividad (matemática y extramatemática) de los estudiantes, lo que según Chevallard (2013), se denomina monumentalismo epistemológico.

También, es importante resaltar que el libro de texto en sus ejemplos siempre usa la letra x para representar a la variable independiente de la función y la letra y para representar la variable dependiente de la función, asimismo usa el ostensivo f para denotar la función. Los objetos ostensivos en el sentido de Bosch (1994) juegan un papel importante en la actividad matemática, por ello el uso de determinados ostensivos pueden traer dificultades a los estudiantes cuando se enfrente a tareas que utilicen otros ostensivos.

A continuación, presentamos un ejemplo encontrado en el libro de texto analizado para ilustrar las nociones de tarea y tipos de tarea.

En la tabla 4, se observa que las tareas reconocer funciones a partir de gráficos cartesianos, reconocer funciones a partir de diagramas sagitales y reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados se agrupan en el tipo de tarea T_4 .

Tipo de tarea (T_4): Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.

Tarea ($t_{4,3}$): Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.

A esta tarea corresponden los ejemplos de la sección de funciones de la página 140, y el ejemplo 1M, 1N, 1P, y 1Q del apartado *Mix matemático* de la página 156.

¿Cuáles de los siguientes conjuntos podrían representar una función?

- $M = \{(1; 3); (2; 6); (3; 9)\}$
- $N = \{(2; 9); (3; 5); (5; 12); (3; 16)\}$
- $P = \{(7; 8); (6; 9); (4; 10); (1; 11)\}$
- $Q = \{(8; 2); (12; 4); (14; 6); (12; 7)\}$

En esta tarea se presenta cuatro relaciones expresadas como pares ordenadas. La acción que el ejecutante de la tarea debe realizar es reconocer que conjuntos representan una función matemática.

TÉCNICAS DEL LIBRO DE TEXTO

Las técnicas que usa el libro de texto para resolver las tareas son algorítmicas, por consiguiente están formadas por un conjunto de pasos. A continuación, describimos cada una de ellas en la tabla 5. Para ello, consideramos la siguiente notación:

$\tau_{i,j}$: donde i indica el tipo de tarea a la que corresponde la tarea, j indica el número de tarea del tipo de tarea i .

Tabla 5 - Técnicas del libro de texto analizado.

Técnicas	Pasos
$\tau_{1,2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar las magnitudes que intervienen. • Identificar los factores que influyen en el resultado de una magnitud. • Reconocer la relación existente entre las magnitudes.
$\tau_{2,1}$	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar los conjuntos de partida y llegada. • Determinar el producto cartesiano $A \times B$ como un conjunto de pares ordenados. • Seleccionar un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ que cumple una propiedad común.
$\tau_{2,2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Definir una relación de A en B expresado como pares ordenados. • Representar los conjuntos A y B mediante diagramas de Venn-Euler. • Representar con flechas que van de A en B cada par ordenado de la relación.
$\tau_{3,1}$	<ul style="list-style-type: none"> • Representar con letras a las magnitudes que intervienen en la situación. • Proponer casos particulares para verificar la dependencia. • Determinar la regla de correspondencia. <p>Establecer la dependencia e independencia entre las variables.</p>
$\tau_{4,1} = \tau_{4,2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Verificar que para cada elemento del conjunto de partida existe una imagen en el conjunto de llegada (existencia). • Verificar que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (unicidad).
$\tau_{4,3}$	<ul style="list-style-type: none"> • Verificar que ningún elemento de la primera componente del par ordenado se repite. • Verificar que cada elemento x del dominio de la función tiene solo una imagen. • Seleccionar el conjunto de pares ordenados que representan funciones.

$\tau_{5,1}$	<ul style="list-style-type: none"> • Escribir las primeras componentes de los pares ordenados en un conjunto de manera ordenada. • Escribir las segundas componentes de los pares ordenados en otro conjunto de manera ordenada.
$\tau_{6,1}$	<ul style="list-style-type: none"> • Asignar valores a la variable x. • Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de x para encontrar $f(x)$. • Construir una tabla de valores. • Construir el plano cartesiano. • Ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano.
$\tau_{6,2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar los conjuntos de partida y llegada. • Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de x para encontrar $f(x)$. • Representar los conjuntos de partida y llegada mediante diagramas de Venn-Euler. • Representar con flechas que van de A en B cada elemento de la función.
$\tau_{6,3}$	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar los conjuntos de partida y llegada. • Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de x para encontrar $f(x)$. • Representar como un conjunto de pares ordenados los elementos de la función.
$\tau_{7,1}$	<ul style="list-style-type: none"> • Establecer la proporcionalidad de las magnitudes. • Escribir la ecuación de la proporcionalidad. • Multiplicar en aspa. • Hallar el valor de la incógnita.

Fuente: Quentasi (2015, p. 143).

En la organización matemática hemos identificado un total de 12 técnicas. Es importante señalar que para cada tarea asociada a un determinado tipo de tarea existe una única técnica que resuelve dicha tarea. Lo cual confirma lo señalado por Fonseca (2004) en el sentido de que en educación secundaria se utilizan técnicas aisladas y muy rígidas. Ello muestra la inexistencia de técnicas diferentes para realizar una misma tarea. Asimismo, el alcance de las técnicas enumeradas no es satisfactorio, puesto que resuelven solo una tarea específica. Además, algunas técnicas no son inteligibles, ya que tienen muy pocos pasos. Es decir, el libro de texto solo presenta un bosquejo de las técnicas. Debido a que el libro de texto analizado está elaborado para estudiantes del primer grado de educación secundaria que por primera vez en su vida escolar entran en contacto con la noción de función es conveniente que el libro de texto presente las técnicas de manera completa.

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrativo tomado del libro de texto analizado.

La técnica ($\tau_{4,3}$) que se emplea para realizar la tarea ($t_{4,3}$): Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados, asociado al tipo de tarea (T_4): Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación. Según el libro de texto analizado tiene tres pasos que a continuación describimos:

Paso 1: Verificar que ningún elemento de la primera componente del par ordenado se repita.

Paso 2: Verificar que cada elemento x del dominio de la función tiene solo una imagen.

- $M = \{(1; 3); (2; 6); (3; 9)\}$ es función, porque los elementos del dominio $\{1; 2; 3\}$ tiene cada uno solo una imagen.
- $N = \{(2; 9); (3; 5); (5; 12); (3; 16)\}$ no es función, porque el elemento 3 del dominio tiene doble imagen, 5 y 16.
- $P = \{(7; 8); (6; 9); (4; 10); (1; 11)\}$ es función, ya que cada elemento del dominio tiene una sola imagen.
- $Q = \{(8; 2); (12; 4); (14; 6); (12; 7)\}$ no es función, pues 12 tiene doble imagen: 4 y 7.

Paso 3: Seleccionar el conjunto de pares ordenados que representan funciones.

Luego, M y P representan funciones.

Por un lado, el libro de texto analizado en la solución de estas cuatro tareas usa los términos *es función* y *no es función*. Es decir, el libro de texto confunde el objeto matemático función con sus distintas represen-

taciones. De otro lado, el alcance de la técnica ($\tau_{4,3}$) que acabamos de presentar es indudablemente limitado, ya que solo resuelve tareas que consisten en reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados, mas no resuelve tareas que consisten en reconocer funciones de un conjunto de relaciones representadas mediante una regla de correspondencia.

TECNOLOGÍAS DEL LIBRO DE TEXTO

En este apartado presentamos las tecnologías que se encuentran en el libro de texto analizado. Es decir, aquí identificamos el conocimiento matemático que se moviliza para realizar las distintas tareas. Además, estas tecnologías deben justificar las técnicas enumeradas en la sección anterior. Para lo cual, consideramos la siguiente notación:

θ_m : es la tecnología que justifica la tarea, donde $m \in \{1; 2; 3; \dots; 18\}$

Producto cartesiano

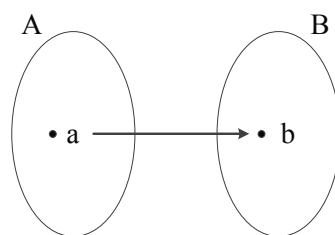
θ_1 : Definición de producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, que se denota con $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados $(a; b)$, donde la primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

θ_2 : Observación sobre diagrama sagital

En un diagrama sagital cada par ordenado se representa con una flecha. Las flechas van del conjunto de partida (A) al conjunto de llegada (B).

Figura 1 - Diagrama sagital.

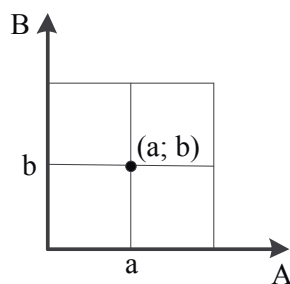


Fuente: PERÚ (2012, p. 139).

θ_3 : Observación sobre el gráfico cartesiano

En un diagrama cartesiano cada par ordenado se representa con un punto. En el eje horizontal se representa al conjunto de partida (A) y en el eje vertical al conjunto de llegada (B).

Figura 2 - Gráfico cartesiano.



Fuente: PERÚ (2012, p. 139).

θ_4 : Definición de par ordenado

En el par ordenado $(a; b)$, a es la primera componente y b es la segunda componente.

θ_5 : Elementos de una relación

Si $(a; b)$ es un elemento de una relación R , se dice que b es la imagen de a .

Funciones

θ_6 : Definición de función

Dados dos conjuntos A y B , se define la función f de A en B como un subconjunto de $A \times B$, donde a cada elemento de A (conjunto de partida) le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada). Se denota por $y = f(x)$.

θ_7 : Definición de regla de correspondencia

La regla de correspondencia nos indica el criterio con el cual se eligen las parejas de elementos del conjunto de partida y de llegada.

VARIABLES DE UNA FUNCIÓN

θ_8 : Definición de variables de una función

En una función $y = f(x)$, x es la variable independiente, puesto que x puede tomar cualquier valor del conjunto de partida, mientras que y , variable dependiente, obtiene su valor dependiendo del asignado a x .

Representación tabular y gráfica

θ_9 : Notación funcional

La notación funcional que representa simbólicamente una función es:

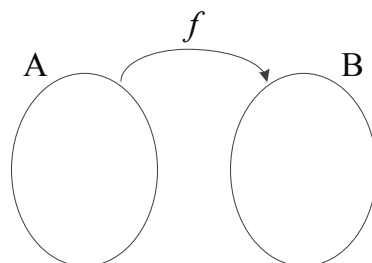
$$f : A \rightarrow B$$

Se lee: función f de A en B .

θ_{10} : Diagrama sagital de una función

La representación de una función a través de flechas se denomina diagrama sagital.

Figura 3 - Diagrama sagital de la función.



Fuente: PERÚ (2012, p. 140).

θ_{11} : Gráfico cartesiano de una función

La representación de una función en un plano cartesiano se denomina diagrama cartesiano (gráfico cartesiano).

Dominio y rango de funciones

θ_{12} : Definición de función como par ordenado

Los elementos de la función f son pares ordenados $(x; y)$, los cuales tienen dos componentes. La primera componente es x , y la segunda es y .

θ_{13} : Definición de dominio de una función

El conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados se denomina dominio de la función.

θ_{14} : Definición del rango de una función

El conjunto de las segundas componentes se denomina rango de la función.

θ_{15} : Imagen y preimagen de una función

En toda función, los elementos del rango se llaman imágenes de los respectivos elementos del dominio (preimágenes), según la regla de correspondencia de dicha función.

Funciones y gráficas

Para que una relación f entre dos conjuntos A y B sea una función de A en B , deben cumplirse dos condiciones:

θ_{16} : Condición de existencia

Para todo elemento de A , donde A es el conjunto de partida, existe una imagen en B , donde B es el conjunto de llegada. Esto se simboliza con:

$$\forall x \in A, y \in B / (x; y) \in f$$

θ_{17} : Condición de unicidad

A cada valor del conjunto de partida le corresponde un único valor del conjunto de llegada. Por lo tanto:

$$(x; y) \in f \text{ y } (x; z) \in f \Rightarrow y = z$$

Proporcionalidad directa

θ_{18} : Definición de magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcional (DP) si el cociente de sus valores permanece constante, es decir: $A \text{ DP } B \Leftrightarrow A/B = K$ ($K =$ constante de proporcionalidad).

En resumen, en el libro de texto existen 18 tecnologías, de los cuales, 17 son a cerca de la función y solo uno está referido a la proporcionalidad directa. También, cabe señalar que existen bastantes elementos tecnológicos en el libro de texto analizado pero que no todos ellos se usan para justificar las técnicas que se emplean para resolver las tareas. Para las técnicas descritas en la tabla 5, por lo menos, existe un discurso tecnológico que la justifica.

De otro lado, el modo como se presenta la noción de función en el libro de texto analizado no tiene relación con lo que los documentos oficiales como el Diseño Curricular Nacional, las Rutas de Aprendizaje y los Mapas de Progreso del Ministerio de Educación del Perú que enfatizan la noción de variabilidad. Al respecto, Lages et al. (2000) sostienen que:

Prácticamente todos los textos escolares de uso en el país (Brasil) definen una función $f : X \rightarrow Y$ como un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ [...]. Esa definición presenta el inconveniente de ser formal, estática y no transmitir la idea intuitiva de función como correspondencia, transformación, dependencia (una magnitud función de otra) o resultado de un movimiento. Los matemáticos y los usuarios de la Matemática miran a una función como una correspondencia, no como un conjunto de pares ordenados. (p. 76)

Según los autores antes citados, existe dos posibilidades para presentar la función a los estudiantes: como un tipo de relación especial y como una correspondencia. La función como una correspondencia está asociada a la idea de variación, es decir, permite analizar cómo cambia el valor de una variable cuando la otra cambia.

El conocimiento matemático movilizado para resolver la tarea ($t_{4,3}$), presentada como ejemplo en las dos últimas secciones, es la definición de función como par ordenado. Por lo tanto, la tecnología (θ_{12}) justifica la técnica ($\tau_{4,3}$).

TEORÍAS DEL LIBRO DE TEXTO

En seguida, presentamos las teorías que justifican las tecnologías que el libro de texto posee en su organización matemática. Para ello, se usa la siguiente notación:

Θ_n : es la teoría que justifica la tecnología.

Donde $n \in \{1; 2\}$

Θ_1 : Teoría de funciones

Según el libro de texto analizado la teoría de funciones comprende: el producto cartesiano, definición de función, variables de una función, representación tabular y gráfica de una función, dominio y rango de funciones, y funciones y gráficas.

Θ_2 : Teoría de las magnitudes proporcionales

De acuerdo al libro de texto que analizado, la teoría de las magnitudes proporcionales comprende magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.

En el libro de texto analizado se ha identificado dos teorías que justifican las tecnologías identificadas en la misma. Además, la teoría de funciones (Θ_1) justifica a la tecnología (θ_{12}) usado como ejemplo en el apartado anterior.

En seguida, presentamos la organización matemática del libro de texto analizado.

Tabla 6 - Organización matemática en base a los ejemplos del libro de texto.

Tipos de tarea	Tarea	Técnica	Tecnología	Teoría
T_1	$t_{1,2}$	$\tau_{1,2}$	θ_6	Θ_1
T_2	$t_{2,1}$	$\tau_{2,1}$	θ_1	
	$t_{2,2}$	$\tau_{2,2}$	θ_1, θ_2	
	$t_{2,3}$	$\tau_{2,3}$	θ_1, θ_3	
T_3	$t_{3,1}$	$\tau_{3,1}$	θ_8, θ_7	
T_4	$t_{4,1}$	$\tau_{4,1}$	$\theta_{16}, \theta_{17}, \theta_{11}$	
	$t_{4,2}$	$\tau_{4,2}$	$\theta_{16}, \theta_{17}, \theta_{11}$	
	$t_{4,3}$	$\tau_{4,3}$	θ_{12}	
T_5	$t_{5,1}$	$\tau_{5,1}$	θ_{13}, θ_{14}	
T_6	$t_{6,1}$	$\tau_{6,1}$	θ_7, θ_{11}	
	$t_{6,2}$	$\tau_{6,2}$	θ_7, θ_{10}	
	$t_{6,3}$	$\tau_{6,3}$	θ_7, θ_{12}	
T_7	$t_{7,1}$	$\tau_{7,1}$	θ_{18}	Θ_2

Fuente: Quentasi (2015, p. 143).

En el análisis precedente se ha verificado que las técnicas $\tau_{4,1}$ y $\tau_{4,2}$ son las mismas y resuelven las tareas del tipo de tarea T_4 .

En la siguiente tabla se presenta un resumen de los componentes de la organización matemática identificada sobre los ejemplos de la unidad 5 del libro de texto analizado.

Tabla 7 - Elementos de la organización matemática del libro de texto analizado.

Componentes	Funciones	Proporcionalidad directa	Total
Tipos de tareas (T)	6	1	7
Tareas (t)	12	1	13
Técnicas (τ)	11	1	12
Tecnologías (θ)	17	1	18
Teorías (Θ)	1	1	2

Fuente: Quentasi (2015, p. 142-143).

En la tabla 7 se observa que la organización matemática construida en torno a los ejemplos está formada por 7 tipos de tareas, 13 tareas, 12 técnicas, 18 elementos tecnológicos y 2 teorías. Además, se ha identificado que 4 tareas que incluyen 9 ejemplos, no tienen ejercicios propuestos en las actividades y en las evaluaciones que presenta el libro de texto analizado. Estos resultados evidencian que la organización matemática del libro de texto analizado es inadecuada para los estudiantes del primer grado de educación secundaria. Asimismo, los componentes de la organización matemática privilegian el objeto matemático función y deja postergada a un segundo plano a la proporcionalidad directa cuando el libro de texto propone las actividades y evaluaciones a lo largo de la unidad de funciones y álgebra.

De otro lado, es importante manifestar que en el sistema educativo peruano el conocimiento matemático función, se estudia por primera vez, en el primer grado de educación secundaria. Mientras, que la proporcionalidad directa ya ha sido estudiado en el quinto y sexto grado de educación primaria. Por ello, cuando el conocimiento matemático función se presenta por primera vez a los estudiantes, es necesario que toda tarea propuesta en el libro de texto tenga al menos un ejemplo que ilustre las diferentes técnicas con que se pueden hacer dicha tarea. En ese sentido, para los alumnos talentosos el libro de texto debe plantear tareas en niveles de creciente complejidad. En particular, el libro de texto analizado presenta algunas preguntas de las pruebas internacionales como PISA. Además, contiene preguntas de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática del Perú y preguntas del examen de admisión de las universidades peruanas.

CONCLUSIONES

La organización matemática en torno a los ejemplos del libro de texto analizado está formada por 7 tipos de tareas, 13 tareas, 12 técnicas, 18 elementos tecnológicos y 2 teorías. Cabe señalar que con las técnicas que aparecen en los ejemplos del libro de texto solo podría resolverse 13 tareas de un total de 42 tareas, es decir, el estudiante solo podría resolver 62 ejercicios de un total de 138 ejercicios. Además, se ha encontrado en la organización matemática construida que para 29 tareas no existe ningún ejemplo y como consecuencia 9 tipos de tareas no tienen ningún ejemplo; por lo tanto, no existen técnicas para resolver estos tipos de tareas. Asimismo, el libro de texto analizado aborda las diferentes tareas con una

sola técnica, no toma en cuenta las notaciones matemáticas al presentar las tareas y confunde la función con sus distintas representaciones al momento de formular y resolver las tareas. El libro de texto, por lo menos, debe presentar una técnica para las tareas propuestas y para cada técnica debe existir al menos una tecnología que la justifique. La mayoría de las técnicas que se encuentran en la unidad del libro de texto solo son esbozadas.

En los ejemplos del libro de texto no se ha encontrado las siguientes tareas: determinar la regla de correspondencia a partir de un texto, expresar la regla de correspondencia a partir de una tabla, realizar estimaciones a partir de un gráfico, efectuar comprobaciones, entre otros. Además, el concepto de función y proporcionalidad directa están relacionados con muchos otros conceptos matemáticos tales como: porcentajes, números racionales, razones y proporciones, escala de mapas, progresiones, etc. Sin embargo, estas relaciones no son tomadas por el libro de texto analizado cuando se proponen las distintas tareas.

De otro lado, los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías identificadas en los ejemplos que el libro de texto presenta para trabajar la noción de función y proporcionalidad directa no satisfacen el criterio de identificación, criterio de las razones de ser y criterio de pertinencia que sugiere Chevallard (1999). Pues, los tipos de tareas no proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas, no son pertinentes en la visión de las necesidades matemáticas de los alumnos y aparecen “aisladas” sin relación verdadera con el resto de la actividad (matemática y extramatemática) de los estudiantes. En particular, los resultados de la investigación realizada muestran que la organización matemática de la función y proporcionalidad directa aparecen de manera separada, pudiendo ocasionar así una enseñanza inadecuada de dichos conocimientos matemáticos.

El libro de texto es un recurso fundamental para que los estudiantes puedan desarrollar las competencias y capacidades del área de matemática. Sin embargo, el profesor de matemáticas no necesariamente debe seguirlo de manera rígida, puesto que la organización matemática de dichos libros de texto presenta limitaciones tal como hemos verificado en nuestra investigación (QUENTASI, 2015). Considerando que el libro de texto es un recurso utilizado por los profesores y estudiantes de educación secundaria del Perú, es importante que el Ministerio de Educación del Perú, mejore la organización matemática de los libros de texto que distribuye gratuitamente a los docentes y estudiantes peruanos como material didáctico.

En base a los resultados de la investigación se sugiere a los profesores del área de matemática antes de usar los libros de texto analizar las tareas propuestas; las técnicas con que se hacen dichas tareas; las definiciones, propiedades y teoremas (tecnologías) que presentan la organización matemática del libro de texto en cuestión.

REFERENCIAS

ALMOULOU, S. Teoría antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 42, p. 9-34, 2015. Disponible en: <<https://goo.gl/9bP8Td>>. Acceso en: 28 de noviembre de 2015.

BOSCH, M. **La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad**. Tesis (Doctoral) Universitat Autònoma de Barcelona - España, 1994. Disponible en: <<https://goo.gl/fxtiwF>>. Acceso en: 27 agosto 2016.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponible en: <<https://goo.gl/ApH4a5>>. Acceso en: 19 de enero de 2016.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. & GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje**. Perú: Horsori, 2005.

CHEVALLARD, Y. Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparádigma emergente. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 161-182, 2013. doi:10.4471/redimat.2013.26. Recuperado el 20 de enero de 2016, de: <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26>

FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria**. Tesis (Doctoral), Universidad de Vigo -España, 2004. Disponible en: <<https://goo.gl/eh2zV2>>. Acceso en: 19 de enero de 2016.

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales**. Tesis (Doctorado en didáctica de las ciencias), Universidad de Jaén - España, 2005. Disponible en: <<https://goo.gl/wXQNP5>>. Acceso en: 19 de enero de 2016.

HURTADO, A. Y ZÚÑIGA, F. **La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica**. Tesis (Licenciatura), Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia, 2011. Disponible en: <<https://goo.gl/Xm8kQ5>>. Acceso en: 28 de agosto de 2016.

LAGES, E.; PINTO, P.; WAGNER, E. & MORGADO, A. **La matemática de la enseñanza media**. Lima: IMCA, 2000.

LUCAS, C. **Organizaciones matemáticas locales relativamente completas**. Memoria de investigación (Diploma de Estudios Avanzados), Universidad de Vigo - España, 2010. Disponible en: <<https://goo.gl/JKH8HZ>>. Acceso en: 19 de enero de 2016.

MAYORGA, L. Organizaciones matemáticas en el libro de texto. Un estudio en el contenido de función lineal en el tercer año de educación media venezolana. **Ciencia de la Educación**, v. 23, n. 42, pp. 69-82, 2013. Disponible en: <<https://goo.gl/SKjMf8>>. Acceso en: 30 de agosto de 2016.

MAZ, A. & RICO, L. Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa**, v.18, n.1, p. 49-76, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1812.

PERÚ, Ministerio de Educación. **Diseño curricular nacional de la educación básica regular**. Lima, 2009.

PERÚ, Ministerio de Educación. **Matemática 1**. Lima: Norma, 2012.

PERÚ, Ministerio de Educación. **Evaluación Censal de Estudiantes 2015. ¿Qué logran nuestros estudiantes en Matemática?** Lima, 2016.

QUENTASI, E. **Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria**. Tesis (Maestría en Enseñanza de las Matemáticas), Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015. Disponible en: <<https://goo.gl/izY3V4>>. Acceso en: 16 agosto 2016.

RUIZ-MONZÓN, N. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. Tesis (Doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona, 2010. Disponible en: <<https://goo.gl/2p7itE>>. Acceso en: 04 enero 2017.

SERRANO, L. **La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica**. Tesis (Doctoral), Universitat Ramon Llull, 2013. Disponible en: <<https://goo.gl/vk7cce>>. Acceso en: 27 agosto 2016.

RECEBIDO EM: 12 jan. 2017.

CONCLUÍDO EM: 11 mai. 2017.