VIDYA, v. 36, n. 2, p. 523-538, jul./dez., 2016 - Santa Maria, 2016. **ISSN** 2176-4603

ILUSÃO DA EQUIPROBABILIDADE, ALEATORIEDADE E CONVERGÊNCIA NOS PROCESSOS COGNITIVOS ENVOLVIDOS NO RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO

ILLUSION EQUIPROBABILITY, RANDOMNESS AND CONVERGENCE IN COGNITIVE PROCESSES INVOLVED IN REASONING PROBABILISTIC

GABRIELA MACHADO MOURA*
SUZI SAMÁ**

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo analisar o raciocínio probabilístico de estudantes do Ensino Superior por meio do Problema de *Monty Hall*. Foi proposta uma atividade, na qual foram utilizados diferentes recursos didáticos, como material concreto, vídeo e simulação. Estas distintas abordagens buscaram a Aprendizagem Ativa da probabilidade condicional, fundamentada no Modelo Pedagógico Relacional. A manifestação dos estudantes ao longo da realização da atividade foi apreciada por meio da análise fenomenológica, sendo identificadas duas categorias: ilusão da convergência e ilusão da equiprobabilidade e aleatoriedade. Apesar do fato de que a maioria dos estudantes chegou à melhor estratégia para a resolução do Problema, as justificativas que subsidiaram as decisões para tal foram tomadas com base em equívocos sobre conceitos de probabilidade. Estes resultados evidenciam que compreender o processo cognitivo dos estudantes é importante para orientar o planejamento do ambiente educacional, a fim de auxiliar no desenvolvimento do raciocínio probabilístico destes.

Palavras-chave: Problema de *Monty Hall*. Raciocínio Probabilístico. Aprendizagem Ativa. Análise Fenomenológica.

ABSTRACT

This paper aims to analyze the probabilistic reasoning college students through the Monty Hall Problem. It was proposed an activity in which we used different teaching resources such as concrete material, video and simulation. These different approaches have sought the Active Learning in conditional probability, based on Pedagogical Relational Model. The demonstration of students throughout of activity was assessed by means of phenomenological analysis, two categories were identified: the illusion of convergence and illusion of equiprobability and randomness. Despite the fact that most students came to the best strategy to solve the problem, the reasons that supported the decisions to do so were made based on misconceptions about concepts of probability. These results show that understanding the cognitive process of students is important to guide the planning of the educational environment in order to assist in the development of probabilistic reasoning of these.

Keywords: *Monty Hall Problem. Probabilistic Reasoning. Active Learning. Phenomenological Analysis.*

* Graduanda em Matemática Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande - FURG. gabrielamou-ra@furg.br. Bolsista Iniciação Científica CNPq.
** Doutora em Educação em Ciências. Universidade Federal do Rio Grande - FURG. suzisama@furg.br.

INTRODUÇÃO

A teoria de probabilidade tem um papel fundamental na vida de todo cidadão, já que auxilia a tomar decisões em contextos que envolvem o acaso e a incerteza, como, por exemplo, para prever riscos médicos, financeiros ou ambientais (GAL, 2005). Além disso, a probabilidade é a base para a inferência estatística presente no meio científico em diversas áreas do conhecimento. Por este motivo, Gal (2005) destaca a importância da aprendizagem da probabilidade para que os indivíduos possam atribuir sentido às previsões e situações que envolvem diferentes níveis de previsibilidade ou imprevisibilidade.

Biehler (1994) propõe que, no ensino da probabilidade, o foco esteja na maneira como esta pode ser utilizada para modelar e compreender aspectos presentes em nossas vidas. No entanto, o que muitas vezes observamos são problemas que aparentemente testam o conhecimento do estudante na aplicação de fórmulas e regras de probabilidade, mas não contemplam o raciocínio probabilístico (JOLLIFFE, 2005).

Segundo Jolliffe (2005), o raciocínio probabilístico pode ser definido como a forma pela qual as pessoas atribuem sentido à informação probabilística. Assim, raciocinar significa compreender e ser capaz de explicar e justificar os processos probabilísticos. A autora ainda destaca que tornar o espaço da sala de aula um ambiente de investigação exige dos estudantes uma participação ativa no que diz respeito à comunicação e expressão das soluções para os problemas de probabilidade. Isto poderá facilitar o acompanhamento por parte do professor do caminho trilhado pelo estudante na resolução do problema e compreender o raciocínio probabilístico destes.

Um ambiente de investigação na sala de aula possibilita promover a Aprendizagem Ativa, na qual o processo de ensino está centrado no aluno, colocando-o como protagonista da própria aprendizagem, seguindo o Modelo Pedagógico Relacional proposto por Becker (2012). A escolha desta abordagem no ensino de Probabilidade se justifica por possibilitar que os estudantes adotem uma atitude ativa ao longo da realização de um experimento.

Neste sentido, o presente artigo tem por objetivo analisar o raciocínio probabilístico dos estudantes, desencadeado pelo experimento com o Problema de *Monty Hall*. Tal proposta visa compreender os processos cognitivos envolvidos na resolução deste problema, no intuito de oferecer subsídios para ações pedagógicas futuras. A pesquisa foi desenvolvida na disciplina de Probabilidade, ofertada a estudantes do curso de Química Licenciatura e Bacharelado, Oceanologia e Engenharia Química, da Universidade Federal do Rio Grande - FURG.

Para tanto, inicialmente, explanamos os fundamentos que sustentaram a proposta pedagógica da disciplina, a saber, a Aprendizagem Ativa e o Modelo Pedagógico Relacional. Na sequência, apresentamos o contexto de realização da referida proposta pedagógica, na qual utilizamos vários recursos didáticos, como o vídeo, material concreto e a simulação. Tal diversidade nos recursos didáticos teve como propósito desenvolver a relação entre as ideias informais do estudante e conceitos progressivamente mais complexos, por meiodo aprimoramento das articulações e reflexões acerca destes fomentadas ao longo da atividade com o Problema de *Monty Hall*.

A apreciação dos registros dos estudantes, realizados ao longo da atividade proposta, foi inspirada na análise fenomenológica, de Martins e Bicudo(1989). Tal escolha justifica-se uma vez que este método de investigação possibilita compreender os processos cognitivos dos sujeitos da pesquisa, respeitando as relações que estes manifestam a partir do raciocínio probabilístico desencadeado pelo Problema de *Monty Hall*. Por fim, apresentamos algumas considerações.

APRENDIZAGEM ATIVA NA SALA DE AULA DE PROBABILIDADE

De acordo com Moraes (2003), o sistema educacional ainda continua alicerçado em metodologias de ensino que não levam o estudante a aprender a pensar para solucionar problemas, a questionar. As aulas, em geral, têm pouca interação, pois não há espaço para o diálogo, já que o professor fica com o domínio da palavra, ao ensinar o quê e como pensar. Neste contexto, o conhecimento pessoal do aluno é desprezado e o conteúdo é ministrado sem nenhuma conexão com o mundo real, dificultando a aprendizagem e "privilegiando a cultura da reprovação, a perda da auto-estima, a apatia e o desinteresse" (MORAES, 2003, p.166).

Por outro lado, Barbosa e Moura (2013) defendem a Aprendizagem Ativa, na qual o estudante interage com o assunto em estudo, construindo o conhecimento em vez de recebê-lo passivamente do professor. Práticas pedagógicas planejadas de forma que o processo de aprendizagem ocorra a partir da própria ação e problematização do estudante estão pautadas no Modelo Pedagógico Relacional, proposto por Becker (2012).

Em pesquisa sobre a prática pedagógica de professores, Becker (2012) observou aulas ministradas para todos os níveis de ensino. Uma destas foi em uma sala de aula do Ensino Superior, em que o conteúdo era Probabilidade. Nesta ocasião, a professora conduzia um monólogo, com algumas observações sobre o conteúdo, como, por exemplo: "Vocês tem que pensar assim... Eu tenho que raciocinar assim..."(BECKER, 2012, p. 286). Na sequência, a docente apresentava problemas previamente confeccionados para que o estudante simplesmente aplicasse as técnicas apresentadas. A participação dos alunos se restringia a responder os questionamentos da professora, em sua maioria, sobre a técnica de resolução do problema.

Segundo Becker (2012), para esta professora, "aprender significa apropriar-se de alguns princípios 'teóricos' e aplicá-los mecanicamente aos dados" (p. 289), o que dificulta o desenvolvimento do senso crítico, a capacidade de reflexão e interpretação, atropelando a construção do conhecimento por parte do estudante. Nesta sala de aula de Probabilidade, o ambiente educacional fica envolto pelo silêncio e a inteligência dos alunos é subestimada. De acordo com o autor, neste contexto, o planejamento está permeado pelo modelo pedagógico diretivo, fundamentado na concepção epistemológica empirista.

Para Becker (2012) no modelo pedagógico relacional, fundamentado na postura epistemológica interacionista/construtivista, a problematização é fundamental para promover o processo de ensino e aprendizagem, estimular o pensamento crítico e reflexivo do aluno, valorizar a capacidade de aprender e aplicar o conhecimento na resolução de problemas concretos.

Neste mesmo sentido, Barbosa e Moura (2013) defendem a Aprendizagem Ativa, a qual:

> ocorre quando o aluno interage com o assunto em estudo - ouvindo, falando, perguntando, discutindo, fazendo e ensinando - sendo estimulado a construir o conhecimento ao invés de recebê-lo de forma passiva do professor. Em um ambiente de aprendizagem ativa, o professor atua como orientador, supervisor, facilitador do processo de aprendizagem, e não apenas como fonte única de informação e conhecimento (p. 55).

Assim, pode-se afirmar que a Aprendizagem Ativa conduz à dinamização das ações pedagógicas em sala de aula. Neste contexto, atitudes passivas cedem lugar à participação em debates, simulação de situações reais.

ABORDAGEM ATIVA DO PROBLEMA DE *MONTY HALL*

Nesta seção, apresentamos o problema de *Monty Hall* bem como o modo como esta atividade foi proposta, a fim de auxiliar os estudantes na escolha da melhor estratégia a ser adotada na solução do problema em questão.

O Problema de *Monty Hall* surgiu na década de 1970, em um programa de televisão dos Estados Unidos, chamado "*Let's Make a Deal*", no qual eram realizados diversos jogos com os convidados. Este problema, considerado como um jogo, circulou em diversos países, principalmente na década de 90, em inúmeros programas de televisão (MLODINOW, 2009). No Brasil, Silvio Santos propôs uma versão do jogo, tornando-o popular no país.

No jogo, são apresentadas ao participante, três portas fechadas, atrás das quais há dois objetos de baixo valor e um prêmio, como, por exemplo, um carro. O jogo é divido em três etapas, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 - Etapas do Problema de *Monty Hall.*

Etapa	Desenvolvimento
Primeira	O apresentador do programa sabe onde se localizao prêmio e os objetos de baixo valor e pergunta ao convidado qual porta ele deseja escolher para abrir.
Segunda	Após o convidado escolher uma das portas, o apresentador abre outra onde se encontram objetos de baixo valor e pergunta ao convidado: "Você deseja permanecer com a porta escolhida inicialmente, ou deseja trocar de porta?".
Terceira	Apenas com duas opções de escolha de portas, já que uma foi aberta anteriormente, cabe ao convidado decidir se mantém sua escolha, ou troca de porta, para enfim saber se ganhou o prêmio ou não.

Fonte: Adaptado de Mlodinow, 2009.

Tendo em vista que o Problema de *Monty Hall* pode proporcionar a compreensão do conceito de probabilidade condicional, foi proposta uma atividade desenvolvida com base neste jogo na disciplina de Probabilidade, da Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Nesta disciplina, estavam matriculados estudantes dos cursos de Oceanologia, Química (Licenciatura e Bacharelado) e Engenharia Química. As aulas foram ministradasna Sala de Aprendizagem de Estatística (SalAEst), Figura 1, criada justamente para possibilitar uma Aprendizagem Ativa. Esta sala é equipada com *tablets*, computadores, multimídia, bem como dez mesas hexagonais que potencializam a interação e o debate entre os estudantes, criando assim, um ambiente propício no desenvolvimento de diferentes estratégias pedagógicas.

Figura 1 - Sala de Aprendizagem da Estatística (SalAEst).

Fonte: Arquivo da SalAEst.

A atividade com o Problema de *Monty Hall* foi dividida em duas aulas de 110 minutos cada. Antes da realização da atividade, apresentamos previamente alguns conceitos básicos de probabilidade para subsidiar a proposta. Esta aula também foi planejada de acordo os pressupostos da Aprendizagem Ativa, de modo que os conceitos foram explorados através de problemas e questionamentos feitos aos estudantes.

Na contextualização do jogo, inicialmente, exibimos a parte inicial do episódio 13 (Figura 2) que explora “O problema de *Monty Hall*”, da série televisiva “Isto é Matemática”. Esta é uma série de divulgação científica, promovida pela Sociedade Portuguesa de Matemática, que aborda tópicos da Matemática de forma descontraída e divertida. A maioria dos episódios desta série explora conceitos aplicados a situações cotidianas, o que possibilita sua utilização na sala de aula (SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA, 2014).

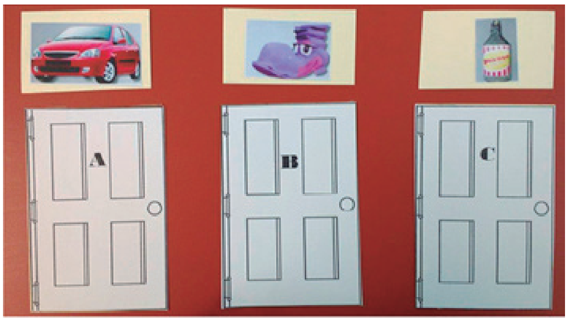
Figura 2 - Vídeo do episódio 13 da 5ª série.

Fonte: Sociedade Portuguesa de Matemática[1].

Na sequência, para que os estudantes pudessem refletir sobre a melhor estratégia para ganhar o prêmio, a turma foi dividida em duplas e foi realizada uma simulação do jogo, com o auxílio do material concreto, em que um fazia o papel de apresentador e o outro, de jogador. Cada dupla de estudantes recebeu as informações detalhadas sobre a atividade e o material concreto (Figura 3), elaborado por duas pesquisadoras da SalAEst, autoras deste artigo, para o desenvolvimento do jogo.

[1] Disponível em: <http://www.spm.pt/istoematematica/>.

Figura 3 - Material Concreto desenvolvido pela equipe proponente da atividade.



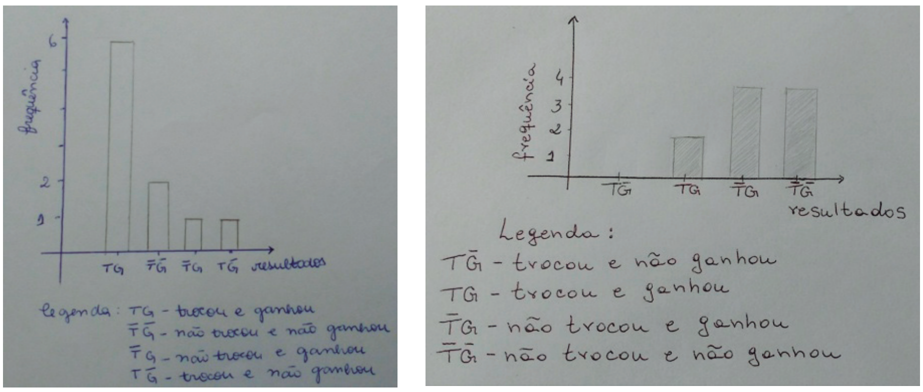
Fonte: Arquivo da SalAEst.

No referido material, além das informações detalhadas sobre o procedimento da atividade, constavam também duas perguntas e uma solicitação: 1) Já conhece o jogo? Se sim, sabe a resposta?; 2) Qual é a melhor estratégia para ganhar o jogo? Por favor, escreva com suas palavras o que você pensou quando tomou sua decisão.

Dos 20 alunos participantes, oito conheciam o jogo, mas nenhum sabia a resposta do problema. Para responder a segunda pergunta, os estudantes foram orientados a executar dez jogadas com o material concreto e refletir sobre a lógica do jogo, em busca da melhor estratégia para ganhar o prêmio, ou seja, se deveriam ou não trocar de porta.

A cada jogada, a dupla anotava a decisão tomada, se havia trocado ou não de porta, bem como o resultado, se ganhou ou não o prêmio. Ao final de dez jogadas, as duplas construíram um gráfico com os resultados obtidos (Figura 4). Finalizada esta etapa, os estudantes debateram sobre as chances e as probabilidades envolvidas no jogo.

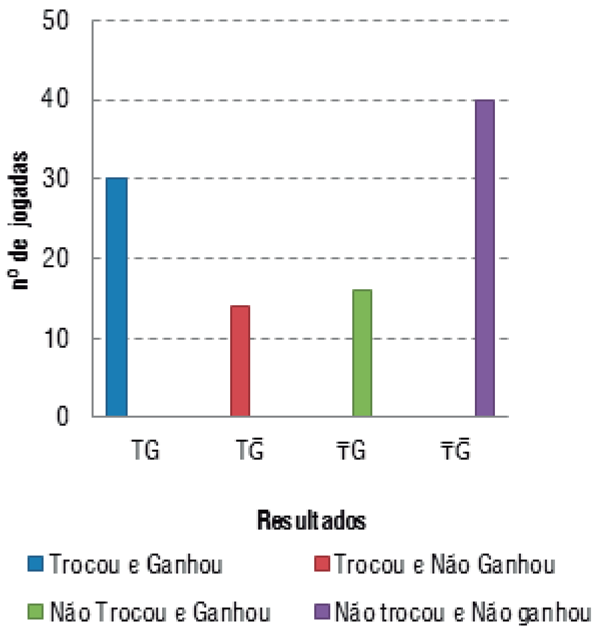
Figura 4 - Gráfico da Dupla 4 e Dupla 10.



Fonte: Dados da Pesquisa.

Como o número de jogadas foi pequeno, cada dupla encontrou diferentes resultados, como podemos observar na Figura 4. A Dupla 10 poucas vezes trocou de porta, já a Dupla 4 optou pela troca na maioria das jogadas. Em função disso, foi proposta a construção de um único gráfico (Figura 5) com todos os resultados da turma. A análise deste gráfico fomentou ampla discussão entre os estudantes, através da qual foi possível conhecer a opinião e crenças de cada um sobre o Problema de *Monty Hall*. Mesmo por meio da construção do gráfico coletivo, os estudantes não conseguiram chegar a um consenso sobre qual seria a melhor estratégia para obter o prêmio valioso (trocar ou não de porta), tampouco acerca da definição de qual é a probabilidade de ganhar o prêmio.

Figura 5 - Gráfico Coletivo da atividade com o Problema de *Monty Hall.*

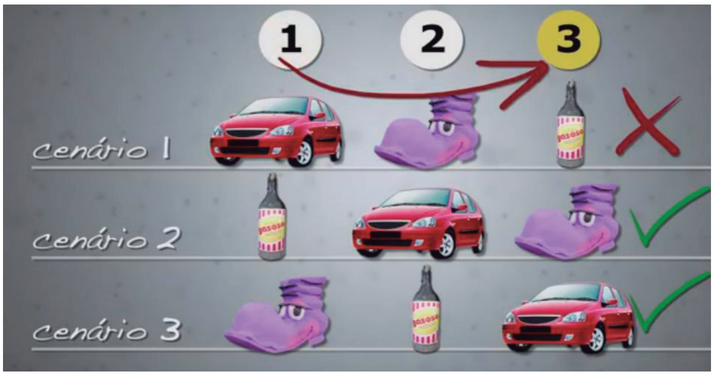


Fonte: Dados da pesquisa.

No seguimento da atividade, foi solicitado que os estudantes respondessem, via escrita, à pergunta:"Qual é a melhor estratégia para ganhar o jogo? Por favor, escreva com suas palavras o que você pensou quando tomou sua decisão". Este questionamento teve por finalidade compreender o raciocínio trilhado pelos estudantes na escolha da melhor estratégia para ganhar o prêmio. Com base nisso, foi solicitado que as duplas explicassem em detalhes a melhor estratégia para ganhar o jogo e o raciocínio trilhado até chegaram a esta conclusão.

Na sequência, foi reproduzida a continuação do vídeo, no qual eram discutidos os três cenários (Figura 6) possíveis no transcorrer do jogo sobre a melhor estratégia a ser adotada.

Figura 6 - Série Isto é Matemática, episódio 13 da 5ª série.

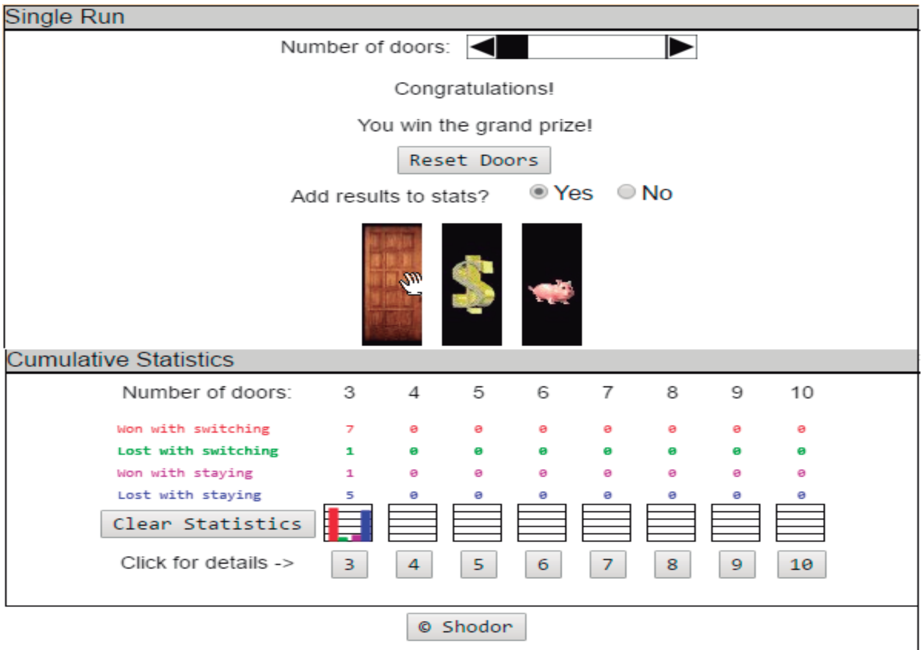


Fonte: Sociedade Portuguesa de Matemática.

O primeiro cenário apresenta a situação em que o jogador escolhe a porta que contém o prêmio. Neste caso, ele só ganha se não trocar de porta. No segundo e terceiro cenários, o jogador escolhe uma porta com um objeto de baixo valor. Assim, só ganhará o prêmio se trocar a porta, quando questionado pelo apresentador. Como podemos observar pela Figura 6, a probabilidade de ganhar o referido prêmio é de 2/3.

Outro recurso utilizado durante a atividade foi um simulador (Figura 7). Este possibilitou fazer várias tentativas do experimento e analisar os resultados.

Figura 7 - Simulador do Problema de *Monty Hall.*



Fonte: <https://goo.gl/hVezTW

A escolha pela simulação como último recurso é corroborada por Fernandes et al, (2009) que sugerem primeiramente a simulação com materiais concretos, e que, seguidamente, os estudantes estabeleçam comparações com simulações em computador, a fim de aumentar a compreensão sobre o experimento.

A simulação, ao repetir um experimento por um número expressivo de vezes, permite criar representações que auxiliam na resolução de problemas os quais muitas vezes não são facilmente perceptíveis apenas com o material concreto e o vídeo. Estas representações, ao privilegiarem a dinamicidade e a interação em detrimento de ações estáticas e inertes, permitem que o estudante experiencie os conceitos probabilísticos de modo ativo (BIEHLER, 2003; KADER, 1990).

Por outro lado, Fernandes et al (2009) destacam que apesar da simulação proporcionar uma solução para o problema:

> esta abordagem não nos fornece a razão pela qual a solução é válida, carecendo, portanto, de valor explicativo, que só se pode obter no enfoque clássico e no cálculo formal de probabilidades. Consequentemente, não podemos contentar-nos com o facto de o aluno ser capaz de passar do domínio da experiência real ao domínio pseudo-concreto, ainda que este passo cumpra uma função didáctica importante e prepare o aluno para a compreensão do domínio formal, pois é apenas neste último que o aluno pode levar a cabo uma actividade matemática de formalização (FERNANDES et al, 2009, p. 180).

Com base neste pressuposto de que a simulação prepara o estudante para o entendimento da validade da solução, na segunda aula, apresentamos aos estudantes a solução formal sugerida por Batanero, Fernandes e Contreras (2009). Para tanto, inicialmente, foram definidos três eventos do experimento: evento A: selecionar, na primeira etapa, a porta que contém o prêmio; evento B: O jogador escolhe uma porta que não contém o referido prêmio; e evento C: O jogador ganha o prêmio. Para calcular a probabilidade de o jogador ganhar o prêmio - P(G) -, precisamos considerar as duas possíveis estratégias: a primeira supõe que o jogador troca de porta, e a outra, que o jogador não troca de porta.

Para calcular P(G), basta notar que $G=(G\cap A)\cup(G\cap B)$, já que o evento $A\cap B$ não apresenta resultados ($\varnothing$) e $A\cup B$ é igual ao espaço amostral. Pelo Teorema da Soma, temos que:

$$P(G)=P((G\cap A)\cup(G\cap B))=P(G\cap A)+P(G\cap B)=P(G/A)P(A)+P(G/B)P(B), \text{ logo:}$$
$$P(G)=P(G/A)P(A)+P(G/B)P(B)$$

Segundo Batanero, Fernandes e Contreras (2009), aplicando a regra de Laplace (Teorema de Bayes), a $P(A)=1/3$ e $P(B)=2/3$, pois há apenas um prêmio e dois objetos de baixo valor. Quando o jogador adota a estratégia de não mudar de porta, a única chance que ele tem de ganhar é quando escolhe inicialmente a porta que contém o prêmio, logo $P(G/A)=1$, consequentemente, a $P(G/B)=0$, então:

$$P(G)=P(G/A).P(A)+P(G/B).P(B) = 1.\ 1/3 + 0.\ 2/3 = 1/3$$

Por outro lado, se a estratégia adotada pelo jogador for trocar de porta, temos $P(G/A)=0$ e $P(G/B)=1$,logo:

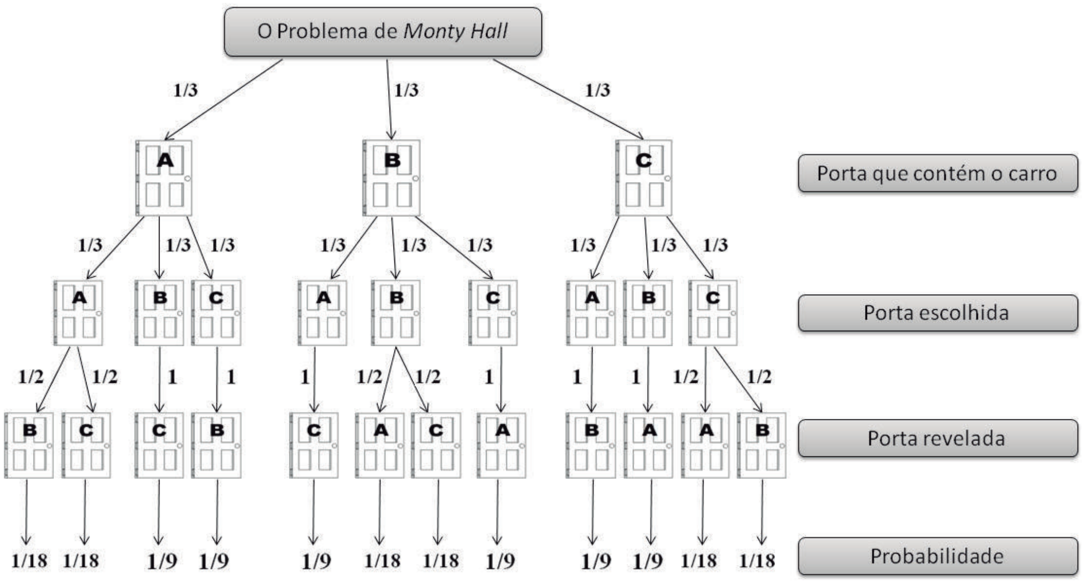
$$P(G)=P(G/A)P(A)+P(G/B)P(B) = 0.\ 1/3 + 1.\ 2/3 = 2/3$$

Assim, concluímos que a melhor estratégia é trocar a porta escolhida inicialmente, pois a probabilidade de ganhar é de 2/3.

Além da solução formal, Batanero, Fernandes e Contreras (2009) também propõem a possibilidade de uma solução intuitiva do Problema de *Monty Hall* por meio do Diagrama de Árvore. Em função disto, esta solução, a qual também possibilita que se verifique a probabilidade de ganhar o prêmio, foi abordada em sala de aula.

Iniciamos a montagem do Diagrama de Árvore pela primeira etapa do jogo, considerando as duas seguintes situações: a porta que contém o carro e a porta escolhida pelo jogador. Estes dois eventos são independentes e têm probabilidade de 1/3. Na segunda etapa do jogo, o apresentador abre uma porta. De acordo com Batanero, Fernandes e Contreras (2009), este evento é dependente dos anteriores, pois a escolha do apresentador depende da porta escolhida pelo jogador e da porta que contém o prêmio. No Diagrama de Árvore (Figura 8), apresentamos as probabilidades para cada situação.

Figura 8 - Solução empírica do Problema de *Monty Hall*



Fonte: Adaptado de Batanero, Fernandes e Contreras (2009)

Supondo que o prêmio esteja na porta A e o jogador escolha tal porta, então o apresentador tem duas possibilidades: revelar o prêmio da porta B ou C. Caso o jogador não troque de porta, a probabilidade de ganhar o prêmio é 1/3. 1/3 .1/2+1/3. 1/3 .1/2= 1/18+1/18=1/9. Com raciocínio análogo, chegamos a mesma probabilidade no caso de o prêmio estar na porta B ou C: se ele optar por não trocar de porta, temos 3. 1/9 = 1/3.

Por outro lado, supondo que o jogador escolha a porta A, e que o prêmio não esteja nesta, logo o apresentador só terá uma possibilidade de porta para abrir. Neste caso, se o jogador trocar de porta, ele ganha o prêmio. A probabilidade de ganhar é 1/3.1/3.1+1/3.1/3.1=1/9+1/9=2/9. Da mesma forma que na situação anterior, com raciocínio análogo, temos mais dois cenários com o mesmo resultado. Assim, a probabilidade de ganhar quando o jogador opta por trocar a porta é 3. 2/9=2/3. Logo, a melhor estratégia a ser adotada é trocar a porta, pois a probabilidade é maior, ou seja, 2/3.

A primeira solução ao Problema de *Monty Hall* foi apresentada por Marilyn vos Savant (QI =228, mais elevado de todos os tempos segundo o *Guiness Book)*, em sua coluna semanal "*Ask Marilyn*", na revista *Parade*, em setembro de 1990. Marilyn afirmou ser preferível trocar de porta, o que aumenta a probabilidade de sucesso para 2/3. Entretanto, esta resposta não foi bem vista pela comunidade científica da época: Marilyn recebeu aproximadamente 10 mil cartas, dentre as quais cercade mil eram de autoria de PhDs, muitos deles professores de matemática, com críticas e insultos. Estes afirmavam que a probabilidade de ganhar correspondia a 50%. Um dos maiores matemáticos do século XX continuava descrente, mesmo depois de ser apresentada uma prova matemática formal da resposta correta (2/3). Somente depois de assistir inúmeras vezes a uma simulação computadorizada preparada por um colega é que ele admitiu estar errado (MLODINOW, 2009).

Na resolução do Problema de *Monty Hall*, assim como em outros experimentos que envolvem o aleatório e o acaso, podem surgir interpretações equivocadas que conduzem a soluções erradas. Por este motivo, ao longo da atividade, os estudantes realizaram anotações e descreveram as decisões e a estratégia que consideravam mais adequada para ganhar o prêmio. Segundo Bicudo (2012), "A descrição da experiência vivida constitui-se no ponto chave da pesquisa qualitativa que privilegia o fenômeno" (p.55). A apreciação de tais anotações foi inspirada na análise fenomenológica, a qual explicitamos na próxima seção.

CAMINHO METODOLÓGICO: A BUSCA DE SENTIDO DAS EXPERIÊNCIAS VIVIDAS

No presente estudo, optamos pela abordagem qualitativa segundo a visão fenomenológica. Tal viés permite o foco nos significados específicos atribuídos ao que observamos, almejando compreender o fenômeno em sua essência, na medida em que este é vivido, experienciado e conscientemente percebido pelos estudantes. Nesta abordagem, o pesquisador se propõe a participar e interpretar as informações que ele obtém a partir da pesquisa (MARTINS; BICUDO, 1989, p. 23).

Conforme Garnica (2012), o adjetivo 'qualitativa' está adequado às pesquisas que reconhecem "a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar" (p.99). Para Maturana (2006), o que investigamos surge através do nosso emocionar como um interesse que não queremos ignorar e o explicamos cientificamente (p. 147). Assim, o conhecimento do pesquisador é gerado em seu próprio existir, em interlocução com os sujeitos da pesquisa e os autores que subsidiam a interpretação do fenômeno.

Toda leitura pressupõe atribuição de sentido realizada pelo leitor a partir de seus conhecimentos, dos discursos com os quais dialoga e de sua visão de mundo (MORAES; GALIAZZI, 2007). Nesse sentido, não pode haver um conhecimento que seja pensado independentemente de nossas experiências vividas. Essa inseparabilidade entre o conhecer e o viver é resumida no aforismo expresso por Maturana e Varela (2005, p.32): "todo fazer é um conhecer e todo conhecer é um fazer".

Sendo assim, buscamos inspiração na pesquisa fenomenológica, proposta por Martins e Bicudo (1989) e Bicudo (2011). Tal viés parte da compreensão do viver, voltada para os significados do perceber, ou seja, "...para expressões claras sobre as percepções que o sujeito tem daquilo que está sendo pesquisado, as quais se expressam pelo próprio sujeito que as percebe" (MARTINS; BICUDO, 1989, p. 93).

A análise inicia com a leitura dos registros dos sujeitos da pesquisa. A partir da leitura e releitura de cada manifestação, o pesquisador identifica unidades de significados, que consistem das partes da descrição que se mostram significativas para ele, apontando também para a experiência do sujeito, para a consciência que o sujeito tem do fenômeno (MARTINS; BICUDO, 1989).

Na sequência, as unidades de significado são agrupadas em categorias, as quais são construídas a partir da identificação dos significados que emergiram dos relatos. Tal processo de categorização expressa a percepção fenomenológica do pesquisador. Por fim, o pesquisador enriquece o texto através das manifestações dos sujeitos que participam da pesquisa, bem como de outros pesquisadores, os quais auxiliam na compreensão e interpretação do fenômeno.

No caso da presente pesquisa, as unidades de significado correspondem a trechos das respostas dos estudantes à seguinte pergunta: "Qual é a melhor estratégia para ganhar o jogo?". As unidades de significado possibilitaram identificar o raciocínio probabilístico que, por vezes, revela os equívocos cometidos. De acordo com Cosenza (2016), estes retratam o despreparo humano em relação aos processos mentais desencadeados na interpretação de situações que envolvem o acaso.

Por isso, é "preciso instruir-se sobre a teoria de probabilidade para conseguirmos ter uma visão diferente do nosso cotidiano. Sem uma aprendizagem adequada, não conseguiremos enxergar o mundo em termos de probabilidades" (COSENZA, 2016, p. 72). Nesse sentido, a compreensão do raciocínio trilhado é relevante na medida em que pode oferecer subsídios para a abordagem alternativa destes conceitos em sala de aula.

Cada unidade de significado foi determinada a partir do conceito probabilístico que a ela permeava. Para agrupá-las, consideramos os referidos conceitos, os quais originaram duas categorias: "A ilusão da convergência" e "A ilusão da equiprobabilidade e aleatoriedade".

OS CAMINHOS TRILHADOS PELOS ESTUDANTES NA COMPREENSÃO DA EXPERIÊNCIA VIVIDA

A primeira categoria emergiu a partir da aplicação equivocada da Lei dos Grandes Números. No que diz respeito à segunda categoria, esta foi delineada a partir da percepção de uma articulação entre os conceitos de Espaço amostral, Independência de eventos e Equiprobabilidade percebidos nas unidades de significado, o que permitiu o agrupamento destas. Na sequência, apresentamos cada uma das categorias.

A ILUSÃO DA CONVERGÊNCIA

Na tentativa de encontrar a melhor estratégia para ganhar o jogo, três duplas tomaram sua decisão com base nos resultados obtidos nas dez jogadas realizadas com o material concreto no início da atividade. A seguir, apresentamos algumas de suas manifestações:

> "Percebemos que quatro jogadas deixamos de ganhar por não trocar. Sendo assim, acreditamos que a melhor estratégia é trocar." Dupla 9
>
> "A dupla concorda que a melhor estratégia para ganhar é trocar, porque mostrou maior n de vitórias em relação as outras opções." Dupla 5

A decisão destas duplas está correta. A melhor estratégia é trocar de porta. No entanto, foi subsidiada pela concepção ou intuição equivocada de que uma amostra pequena reflete precisamente a probabilidade de ocorrência de um experimento. Tal concepção foi denominada de Lei dos Pequenos Números, por Tversky e Kahneman (1971), pois, conforme Mlodinow (2009), este é um nome sarcástico para descrever a tentativa errônea da aplicação da Lei dos Grandes Números, em situações que envolvem um pequeno número de tentativas.

Devido à aleatoriedade e ao pequeno número de repetições do experimento, os estudantes chegam a resultados semelhantes independente da estratégia adotada: trocar ou não trocar de porta, como podemos observar na colocação da Dupla 1:

> “No caso do jogador 1 a melhor escolha foi trocar a opção inicial, pois isso o levou ao prêmio. Já no caso do jogador 2 é o contrário, este teve êxito ao não trocar a inicial.” Dupla 1

Tal situação evidencia que a convergência não se manifesta em um número pequeno de tentativas (BATANERO;FERNANDES; CONTRERAS, 2009). Este é um dos quatro equívocos mais comuns na resolução do Problema de *Monty Hall* apontado pelos autores.

Segundo Cosenza (2016), “A lei dos pequenos números tem implicações importantes no cotidiano, pois as pessoas costumam tirar conclusões e tomar decisões a partir de observações esparsas e insuficientes” (p. 75). Decisões tomadas com base em observações insuficientes são explicadas pelas ciências cognitivas. Estudos nesta área têm possibilitado compreender melhor a neurobiologia e a estrutura cognitiva por trás do funcionamento do cérebro (COSENZA, 2016).

Conforme Cosenza (2016), o tipo de cognição que usamos a maior parte do tempo “viabiliza escolhas e decisões rotineiras, e, em geral, é bastante satisfatório para a nossa vida cotidiana. Contudo, algumas vezes nos leva a ações ou comportamentos que podem não ser os melhores” (p. 27). Ainda segundo o autor, o processamento autônomo e instintivo procura por causas e costuma acreditar na lei dos pequenos números, pois nosso cérebro tende a buscar padrões e regularidades. Deste modo, as sequências aleatórias podem parecer regulares, quando não o são.

A ilusão da equiprobabilidade e aleatoriedade

Na primeira etapa do jogo, os estudantes foram questionados sobre qual era a probabilidade de ganhar o prêmio. Nove duplas concordaram que a probabilidade inicial de ganhar o prêmio era de 1/3. A maior controvérsia surgiu na segunda etapa, quando o apresentador abre uma das portas que não tem o prêmio. Oito duplas consideraram que a probabilidade de ganhar o prêmio aumentava para 1/2, pois ficaram com dois prêmios e duas portas, como destacado nos seguintes trechos:

> “São três portas apresentadas, porém a primeira escolha não entra na contagem de probabilidade de acerto, pois uma das portas será eliminada criando uma segunda situação onde uma porta é premiada e a outra não. Nessa segunda situação você pode escolher trocar a porta, ou seja, selecionar novamente uma outra, sendo assim têm-se 50% de chance de ganhar e 50% de perder”. Dupla 7

> “A probabilidade geral, inicial, de acertar a porta é de 1/3, 33%, porém ao revelar uma porta, sobram duas portas e a probabilidade para acertar cresce para 50%, já que o novo conjunto agora possui um total de duas portas”. Dupla 1

> “A dupla concluiu que a melhor estratégia para ganhar o jogo é trocar de porta, já que a escolha entre 3 portas a probabilidade de ganhar é 1/3 (33%) e quando uma delas é aberta o participante tem ½ (50%) de chance de acertar se trocar de porta, e se o participante mantiver a escolha a probabilidade continua 33%”. Dupla 4

Na fase inicial do jogo, assumindo a aleatoriedade da distribuição dos prêmios, todas as duplas atribuíram, corretamente, a mesma probabilidade de cada porta esconder o grande prêmio, ou seja, 1/3. Na segunda etapa, após o apresentador revelar outra porta que não contém o prêmio, o jogador tem que decidir se quer trocar ou não de porta, momento que configura o dilema do Problema de *Monty Hall*. Nesta etapa do experimento, a maioria das duplas (nove) concluiu que a chance de ganhar aumenta para 50%.

Este equívoco não foi cometido apenas pelos estudantes, mas também pelos leitores da coluna de Marilyn, que não concordaram com a solução ao Problema de *Monty Hall* proposta por ela. A conclusão dos estudantes participantes desta pesquisa e dos leitores da coluna de Marilyn pode ser explicada por um erro cognitivo típico baseado na ilusão de que, após a eliminação da porta revelada pelo apresentador, as chances têm de ser atualizadas (TUBAU; AGUILAR-LLEYDA; JOHNSON, 2015). Esta ilusão tem sido atribuída a uma aplicação errada do princípio da equiprobabilidade (FALK, 1992).

De acordo com Batanero, Fernandes e Contreras (2009), a escolha do jogador na primeira etapa do jogo influencia a seleção da porta que o apresentador abrirá na segunda, uma vez que este sabe onde se encontra o prêmio. “Ao abrir esta porta, o apresentador usou seu conhecimento para evitar de revelar o prêmio, portanto não se trata de um processo completamente aleatório” (MLODINOW, 2009, p. 63).

Segundo Fernandes et al (2009), “o espaço amostral na segunda experiência varia com o resultado da primeira” (p. 176), pois, se o jogador escolher a porta que contém o prêmio, o apresentador pode abrir qualquer uma das duas portas restantes. Caso o jogador escolha uma porta que não contém o prêmio, o apresentador terá uma única porta para revelar. Sendo assim, os eventos não são independentes.

Não obstante os equívocos que subsidiaram a decisão dos estudantes apresentados nas duas categorias acima, seis duplas apontam que a melhor estratégia é trocar de porta. Uma delas conseguiu formular uma justificativa muito próxima da solução do Problema de *Monty Hall*:

> “Escolher trocar de porta sempre me dá 2 chances de escolher uma errada e trocar para certa.” Dupla 9

Esta decisão evidencia que a dupla identificou a melhor estratégia, no entanto, não conseguiu justificar melhor, mesmo em palavras, tal escolha.

Outro aspecto apontado pelas duplas diz respeito à influência do apresentador no jogo. No entanto, este aspecto não será explorado no presente artigo, pois as observações dos estudantes, quanto ao papel deste no experimento, estão mais associadas a sua atuação cênica do que à Teoria de Probabilidade.

CONSIDERAÇÕES

Abordar o Problema de *Monty Hall* em um ambiente educacional planejado com diferentes recursos didáticos como o material concreto, o vídeo e a simulação levou os estudantes à ação e problematização, o que potencializou uma Aprendizagem Ativa. Nesta, a construção dos conceitos de probabilidade ocorreram de forma processual, ao longo da experiência vivida pelos estudantes no transcorrer da atividade.

Ao final do experimento a maioria das duplas chegou a melhor estratégia para ganhar o prêmio, no entanto nenhuma conseguiu fundamentar sua decisão na Teoria de Probabilidade. Tal constatação nos levou a analisar com atenção as manifestações dos estudantes registradas ao longo do experimento, por meio da análise fenomenológica. Esta trouxe elementos que evidenciaram os caminhos percorridos pelos estudantes na tentativa de encontrar a melhor estratégia para o Problema de *Monty Hall*. Estes caminhos em sua maioria foram tomados com base em equívocos envolvendo conceitos de probabilidade, tais como independência de eventos, espaço amostral, aleatoriedade, lei dos grandes números e equiprobabilidade.

Os resultados desta pesquisa evidenciam a necessidade de se promover atividades que fomentem a discussão, reflexão e ação dos estudantes na resolução de problemas de forma a potencializar o ensino e a aprendizagem dos conceitos probabilísticos. Ficou evidente também que compreender o processo cognitivo dos estudantes é de suma importância para orientar o planejamento e a organização do ambiente educacional a fim de auxiliar no desenvolvimento do raciocínio probabilístico, tão relevante para a tomada de decisões em diferentes situações de nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Laboratório de Estudos Cognitivos e Tecnologias na Educação Estatística - LabEst da FURG por sediar o projeto, bem como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. Metodologias Ativas de Aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. **B. Tec. Senac**, Rio de Janeiro, v. 39, n.2, p.48-67, 2013.

BATANERO C. B.; FERNANDES, J. A.;CONTRERAS, J. M. G. Un análisis semiótico del problema de *Monty Hall* e implicaciones didácticas. **Suma62**, nov. 2009, p. 11-18.

BECKER, F. **A Epistemologia do Professor**: o cotidiano da escola. 15 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

BIEHLER, R. Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory classes. In: IASE 2003 Satellite Conference, Berlin, 2003.

COSENZA, R. M. **Por que não somos racionais**: como o cérebro faz escolhas e toma decisões. Porto Alegre: Artmed, 2016.

FERNANDES, J. A.;BATANERO C. B.; CONTRERAS, J. M. G.; DÍAZ, C. B. A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. **Quadrante**, v. 28, n 1 e 2, 2009.

BIEHLER, R. **Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes - Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis?**4ª International Conference on Teaching Statistics - ICOTS 4, Marrakech, 1994.

FALK, R. A Closer Look at the Probabilities of the Notorious Three Prisoners. **Cognition**, 43, 1992, p. 197-223.

FERNANDES, J. A.; BATANERO, C. B.; CONTRERAS, J. M. G.; DÍAZ, C. B. A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. **Quadrante**, v.28, n 1 e 2, 2009.

GAL, I. Towards "Probability Literacy" for All Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. In: JONES, G. A. **Exploring Probability in School**. New York: Springer, p. 39-64, 2005.

GARNICA, A V M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

JOLLIFFE, F. Assessing Probabilistic Thinking and Reasoning. In: JONES, G. A. **Exploring Probability in School**. New York: Springer, p. 325-364, 2005.

KADER, G. Simulations in mathematics-probability and computing. In: 3º International Conference on Teaching Statistics - 3º ICOTS, 1990, p. 178-186.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V. **A Pesquisa Qualitativa em Psicologia**: fundamentos e recursos básicos. São Paulo: Editora Moraes, 1989.

MATURANA, Humberto. **Cognição, ciência e vida cotidiana.** Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2006.

MATURANA, H. R.; VARELA, F. **A árvore do conhecimento**: as bases biológicas da compreensão humana. 5. ed. São Paulo: Palas Athena, 2005.

MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MORAES, M. C. **Educar na Biologia do Amor e da Solidariedade.** Petrópolis: Vozes, 2003.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Ed. da Unijuí, 2007.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA. Série Isto é Matemática. Disponível em: <https://goo.gl/ICu04i>. Acesso em fev. 2015.

TVERSKY, A.; TVERSKY, D. Belief in The Law of Small Numbers. Psychological Bulletin, v. 76, n. 2, 1971, p. 105-110.

TUBAU E., AGUILAR-LLEYDA, D.; JOHNSON, E. D. Reasoning and choice in the *Monty Hall* Dilemma (MHD): implications for improving Bayesian reasoning. **Frontiers in Psychology**. v. 6, mar 2015, article 353, p. 1- 11.

RECEBIDO EM: 10 ago. 2016.
CONCLUÍDO EM: 01 nov. 2016.