

## PROSPECTIVAS PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE E DA ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

### *PROSPECTS FOR THE STUDY OF PROBABILITY AND STATISTICS IN ELEMENTARY AND MIDDLE SCHOOL*

CELI ESPASANDIN LOPES\*  
LUZINETE DE OLIVEIRA MENDONÇA\*\*

#### RESUMO

Este artigo visa contemplar uma discussão sobre aspectos filosóficos e psicológicos relacionados a Probabilidade e Estatística, a fim de apresentar indicadores sobre o desenvolvimento do estudo dessas temáticas ao longo do Ensino Fundamental. Há uma lacuna de orientações a respeito do desenvolvimento do raciocínio probabilístico e estatístico ao longo da escolaridade no Brasil. Realizou-se um levantamento bibliográfico que apresenta subsídios para este estudo e também consideraram-se documentos curriculares que viabilizassem a ampliação das discussões. O processo analítico sobre esses referenciais e documentos foi interpretativo. Buscou-se convergências a partir de múltiplas leituras do referencial teórico e dos documentos curriculares a fim de apontar indicadores sobre os conceitos e os procedimentos probabilísticos e estatísticos que poderão ser considerados pelos professores na preparação de atividades para suas aulas e em futuras elaborações de currículos de matemática.

**Palavras-chave:** Educação Estatística. Currículo de Matemática. Probabilidade e Estatística. Ensino Fundamental.

#### ABSTRACT

*This paper aims to encompass a discussion of philosophical and psychological aspects related to probability and statistics in order to provide indicators on the development of the study of these topics throughout the elementary and middle school. There is a lack of guidelines regarding the development of probabilistic and statistical reasoning throughout schooling in Brazil. We conducted a review literature that presents subsidies for this study and a read of some curricular documents that would enable the expansion of the discussions. The analytical process on these references and documents was interpretative. There are convergences in the multiple readings about curriculum documents to point indicators on the concepts and probabilistic and statistical procedures that may be considered by teachers in activities to prepare for their classes and in future elaborations of curriculum mathematics.*

**Keywords:** Educação Estatística. Mathematics curriculum. Probability and Statistics. Elementary school. Middle school.

---

\* Doutora em Educação. Professora Titular do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul. E-mail: celi.espasandin.lopes@gmail.com

\*\* Doutora em Ensino de Ciências e Matemática. Pós-Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul. E-mail: luza.oliveira7@gmail.com

## INTRODUÇÃO

Com o objetivo de apontar indicadores que contribuam para o estudo da Probabilidade e da Estatística ao longo do ensino fundamental, realizamos um estudo bibliográfico e documental, de forma a suscitar uma discussão acerca da abordagem do conhecimento estatístico e probabilístico no currículo desse nível de ensino, pautada nos aspectos filosóficos e psicológicos dessas temáticas.

Observamos, na literatura de Educação Estatística, algumas produções que têm o foco sobre o currículo de matemática e a inserção de conceitos probabilísticos e estatísticos no Ensino Fundamental (LOPES, 1998; GONÇALVES, 2005; ROTUNNO, 2007). No entanto, as pesquisas ainda não têm voltado seu olhar atentamente para o processo de desenvolvimento desses conceitos ao longo dos anos do ensino fundamental. Temos discutido atividades recomendadas para essa escolaridade e indicado alguns recursos didáticos e tecnológicos, mas não temos explicitado o que os estudantes devem aprender em cada ano de sua escolarização (GARCIA, 2008; SOUZA, 2009; ABE, 2011; DAMINELLI, 2011; FERNANDES, 2014).

Realizamos um levantamento bibliográfico que apresenta subsídios para este estudo e também consideramos alguns documentos curriculares, a fim de obter parâmetros que viabilizassem a ampliação das discussões.

O processo analítico desses referenciais e documentos foi interpretativo e viabilizou indicadores que poderão ser considerados em futuras elaborações de currículos de matemática que indiquem a inserção de probabilidade e estatística no Ensino Fundamental. Elegemos categorias a partir de múltiplas leituras do referencial teórico e dos documentos curriculares.

Não tomamos uma teoria específica de currículo para apontar os indicadores para a educação estatística escolar, pois não temos a intenção de listar linearmente os conteúdos de probabilidade e estatística a serem trabalhados. Queremos apenas suscitar discussões e apontar alguns indicadores que poderão ser considerados por professores para delinear as atividades de ensino que irão propor aos seus alunos e/ou compor elaboradores curriculares que fundamentem suas propostas. Para isso, consideramos alguns aspectos das teorias de aprendizagem de Bruner (1965, 1976) e de Vygotsky (1988, 1989) que, por ressaltarem a descoberta e a interação social, aspectos particularmente relevantes para a Educação Estatística, podem respaldar nossas ponderações.

## PERCURSO METODOLÓGICO

Nesta pesquisa optamos por considerar o estudo documental e bibliográfico. Tomamos como referência a discussão que faz Oliveira (2007) sobre a distinção entre essas modalidades de pesquisa. Para essa autora, a pesquisa bibliográfica é uma modalidade de estudo e análise de documentos de domínio científico, tais como livros, periódicos, enciclopédias, ensaios críticos, dicionários e artigos científicos. Como característica diferenciadora, ela pontua que é um tipo de “estudo direto em fontes científicas, sem precisar recorrer diretamente aos fatos/fenômenos da realidade empírica” (p. 69). Ela caracteriza a pesquisa documental como a busca de informações em documentos que não receberam nenhum tratamento científico. O elemento diferenciador está na natureza das fontes: a pesquisa bibliográfica remete para as contribuições de diferentes autores sobre o tema, atentando para as fontes secundárias, enquanto a pesquisa documental recorre a materiais que ainda não receberam tratamento analítico, ou seja, as fontes primárias.

Diante de tais pressupostos, realizamos uma etapa inicial centrada na busca e na análise de textos científicos que trouxessem discussões filosóficas e de natureza psicológica sobre os raciocínios

estatísticos e probabilísticos. Depois procedemos a uma análise preliminar dos documentos curriculares, buscando evidenciar as indicações e as articulações propostas para a abordagem dos conceitos e para o trabalho com procedimentos que contribuíssem para essas duas formas de raciocínio.

A análise foi desenvolvida por meio de uma discussão sobre os temas, as referências bibliográficas e os indicativos teóricos e metodológicos enunciados nos documentos curriculares. O processo de análise do conteúdo dos documentos pautou-se em reconhecer uma unidade de análise e organizar os dados. Posteriormente, após numerosas leituras e releituras do referencial teórico mapeado e dos documentos, buscamos as convergências, a fim de evidenciar os conteúdos explícitos e os não explícitos.

A partir desse movimento investigativo, organizamos este texto, trazendo a revisão sobre a filosofia da probabilidade e da estatística e as formas de raciocínio probabilístico e estatístico, bem como quatro documentos curriculares que foram utilizados apenas como norteadores para as reflexões realizadas, seguidas das discussões decorrentes do processo de análise e de algumas considerações

## APRENDIZAGEM E CURRÍCULO

Bruner (1965) se refere ao envolvimento dos alunos no processo de descoberta que apresenta convergência com o pensar probabilístico e estatístico. Para o autor, o aluno deve poder resolver problemas e conjecturar, proposta que converge com o processo empreendido no campo científico dessas disciplinas. Bruner (1976) acredita que a solução de muitas questões depende de uma situação ambiental que se apresente como um desafio à inteligência do estudante, levando-o a resolver problemas. Desse ponto de vista, a formação de conceitos globais, a construção de generalizações coerentes e a explicitação da estrutura funcionam como facilitadores da aprendizagem.

Complementando essas ideias, temos a perspectiva vygotskyana de que o pensamento é construído gradativamente em um ambiente histórico e essencialmente social. Para Vygotsky (1988, 1989), a interação social possui um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo e no desenvolvimento cultural de um sujeito. Portanto, ela é origem e motor da aprendizagem e do desenvolvimento intelectual.

Para pensar essas ideias na prática docente, o professor deverá reconhecer a ideia de “zona de desenvolvimento proximal” e estimular o trabalho colaborativo, de forma a potencializar o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Os recursos tecnológicos podem ser ferramentas motivadoras nesses ambientes e podem contribuir para essa prática.

As diretrizes teóricas de Bruner e Vygotsky se interligam em muito aspectos, principalmente se considerarmos que somos seres históricos e sociais e, portanto, produzimos cultura através de nossas experiências.

Dessa forma, o diálogo desses teóricos com a Educação Estatística é muito pertinente, já que o processo de descoberta, a resolução de problemas, a colaboração, a interação social, os recursos tecnológicos e os contextos culturais são essenciais para o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade e da estatística.

Diante disso, defendemos que, ao inserir a educação estatística no currículo escolar, não se pode pensar um currículo com amarras. Portanto, nos contrapomos à linearidade curricular e à consideração de pré-requisitos. Acreditamos que a produção de um currículo é cultural e social e que o desenvolvimento curricular vem marcado pela indeterminação, pela incerteza e pela complexidade; pela ênfase no desenvolvimento de habilidades e de múltiplas formas de raciocínio, por meio de estudos investigativos que tenham seus centros na formulação e na resolução de problemas.

A sociedade contemporânea exige a formação de pessoas participativas, críticas, reflexivas e criativas. A Educação Estatística pode contribuir muito para essa formação, se for abordada de forma a aguçar a capacidade reflexiva, a criticidade e a estimular as potencialidades dos alunos diante de uma realidade passível de ser transformada mediante sua intervenção.

Além disso, o currículo tem como finalidade a construção da identidade dos alunos, na medida em que ressalta a individualidade e o contexto social em que estão inseridos. Esse fato requer uma prática pedagógica que respeite a heterogeneidade e dê ouvido e voz aos alunos (D'AMBROSIO, 2014).

Para discutir os conceitos e os procedimentos que poderão ser inseridos no currículo escolar a partir da escolha do professor, delinearemos um panorama filosófico da probabilidade e da estatística, buscando evidências de aspectos relevantes para a apreensão dos conceitos, dos raciocínios e dos procedimentos inerentes a essas áreas do conhecimento.

## PANORAMA FILOSÓFICO DA PROBABILIDADE E DA ESTATÍSTICA

Desde os primórdios o homem busca compreender os fenômenos da natureza. E, conforme ressalta Cabria (1992, p. 21, destaques do autor), essa busca deu origem a dois grupos de fenômenos, os quais compreendiam, por um lado, acontecimentos possíveis de prever e, por outro, aqueles que não possibilitavam previsão:

entre os primeiros, estavam aqueles que os homens podiam controlar aqueles que eram “desenho” da inteligência humana, que foram advindos de causas conhecidas imutáveis ou de uma vontade e propósito perseguido pela Inteligência. [...] Entre estes últimos, estavam os que resultavam do “destino” ou cadeia de eventos fatais de acontecimentos, ou aos “sinais”, deuses ou forças desconhecidas que atuaram irresistivelmente sobre outras divindades e sobre os homens e eventos.

Desse ponto de vista, os acontecimentos que se encaixam no segundo grupo eram atribuídos ao acaso, ou azar, o que, conforme o autor, foi considerado, por vários estudiosos como uma carência de conhecimento. Poincaré (1992, apud COUTINHO, 2007), por exemplo, considerou o azar ou acaso como uma medida da ignorância das pessoas sobre um fenômeno.

O acaso, como relata Cabria (1992), embasou rituais de adivinhações na Antiguidade e até nos dias atuais. Essa crença deu origem aos jogos de azar, os quais foram usados em processos de tomada de decisões em situações de diversas naturezas, por muitos povos ao redor do mundo. O uso dos jogos como meio de distração também foi observado em todo o planeta, desde a Antiguidade, e não é possível atribuir autoria à sua criação. Essa prática foi tão disseminada que na Roma antiga foi proibida, por ser considerada um vício e por ocorrer habitualmente a adulteração de peças do jogo para favorecer um jogador (COUTINHO, 2007). Apesar disso, foi a partir dessa disseminação que os estudiosos da época passaram a olhar para o acaso, para além da ideia de forças desconhecidas (CABRIA, 1992). Ou seja, o acaso passou a ser observado a partir da regularidade de seus resultados.

Coutinho (2007) pondera que a análise dos jogos como “geradores de acaso” só passou a ser formalizada a partir do século XVI, com o desenvolvimento da análise combinatória por Girolano Cardano (1501-1576), a qual favoreceu o cálculo de possibilidades, permitindo a observação de regularidades dos resultados. Sobre esse aspecto, a autora considera que o jogo atribui ritmo ao acaso,

devido a sua renovação temporal. É oportuno considerar que, com essa abordagem, o azar passa a se configurar em um novo conceito: o de probabilidade.

A compreensão do conceito de probabilidade é dificultada em função das muitas interpretações e significados atribuídos a esse termo. Cabria (1992) considera que a diversidade de sentido atribuída à probabilidade, em grande medida, se justifica pela influência das crenças individuais e dos conhecimentos de cada sujeito sobre os fenômenos. Essas crenças podem tanto se basear na aceitação do acaso como um conjunto de forças inexplicáveis quanto partir de bases puramente axiomáticas. É possível concluir que, em meio a esses extremos, se situam outras configurações, as quais se aproximam mais de um ou do outro polo.

No que diz respeito ao primeiro caso, o sentido atribuído à probabilidade é de natureza fatalista ou divina: aceita-se um acontecimento, sem questionar sua origem ou causa. No segundo caso, usam-se axiomas e fórmulas matemáticas, recursos suficientes para determinar o grau de probabilidade de ocorrência de um evento, sem questionar sua validade (CABRIA, 1992).

Em meio a esses extremos, há ainda diversas interpretações do conceito de probabilidade, dentre as quais se situam aquelas que podem levar em conta os recursos matemáticos, as crenças e os conhecimentos ou as vivências anteriores acerca de um determinado fenômeno em diferentes graus. Um exemplo dessa interpretação pode ser visto quando um indivíduo aposta todos os seus recursos, embasado em um índice de 75% (calculado matematicamente) de chance de ocorrer um determinado evento, mas desconsidera completamente o fato de, em uma única oportunidade, essa ocorrência ter 25% de chance de não se efetivar. Tal interpretação da probabilidade pode advir do simples fato de essa ocorrência lhe ser favorável.

Nessa situação, a subjetividade determina a atribuição de significado à probabilidade, condição que contribuiu para a dificuldade para compreender o significado de probabilidade. Nesse sentido, a noção de acaso, devido a sua complexidade, teve, ao longo da história, certa diversidade de interpretações (COUTINHO, 2007).

Dentre tais interpretações se destaca o sentido comum, o qual se contrapõe às leis e às fórmulas matemáticas, que são aceitas de forma inquestionável e seu resultado é encontrado a partir do uso de suas ferramentas, que auxiliam a tomada de decisão.

Nessa perspectiva, uma lei encontrada a partir de uma experiência controlada ou de um processo de abstração embasado em um raciocínio lógico é considerada generalizável, podendo ser aplicada em qualquer situação correlata. É preciso ponderar, no entanto, a necessidade de condições específicas para que essa analogia possa ser feita. Tal concepção atende a uma visão determinista do acaso.

Segundo essa visão, dadas as condições iniciais e adjacentes de um sistema e as leis que regem sua evolução, o estado desse sistema em qualquer instante futuro pode probabilidade, o autor considera que

a teoria de probabilidade deve recolher, idealmente, todos os usos de probabilidade em ciência, tecnologia e linguagem comum. A exigência é demasiado ambiciosa e não acredito que possamos reconstruir uma teoria de probabilidade de modo que satisfaça plenamente essa idealização. Por isso, falo em teorias de probabilidade ou de interpretações de probabilidade, no plural. Cada teoria tentará a interpretação de um conjunto de aplicações de probabilidade, sancionadas pelo uso, a nível setorial. As teorias se embasam, pois, nos usos que delas se faz e pretendem, a seu tempo, regulamentar esses usos. Se este último não fosse dado, se não tiverem

caráter prescritivo, não seriam teorias, mas meras descrições de usos atuais. O uso, portanto, informa a teoria e esta regula a extensão do uso. (CABRIA, 1992, p. 166)

A linguagem comum, nesse prisma, demonstra o sentido comum ou popular de probabilidade, empregado pelas pessoas, e constitui-se em uma ferramenta para análise de situações que envolvem fenômenos aleatórios e para tomada de decisão diante delas.

Diante disso, está posta uma intersecção com a estatística, que, como ciência de análise de dados, toma a variabilidade como centro de seus estudos. A incerteza sobre os dados analisados no processo estatístico marca sua presença, porém é a probabilidade que estuda a influência da aleatoriedade. Esse movimento faz com que probabilidade e estatística sejam conhecimentos enredados.

Para Hacking (1964), a lei da probabilidade é uma proposta de explicação de um fato fundamental sobre a longa frequência de execução, ou seja, um fato dado como certo ainda nos permite prever o que vai acontecer a seguir, com base na sua frequência. Ele não parece dedutível de quaisquer fatos mais fundamentais, exceto, talvez, aqueles que dele diferem apenas na generalidade.

O autor considera que os axiomas de Kolmogorov, somados à lei da probabilidade, constituem-se, em parte, da definição postulante do acaso, ou seja, a frequência a longo prazo, o que parece ser parte dos fundamentos da estatística.

Assim se evidencia o entrelace da probabilidade com a estatística. No entanto, ainda cabe discutir algumas das principais interpretações de probabilidade, visando às intervenções pedagógicas adequadas para o estudo probabilístico na educação básica.

As principais interpretações de probabilidade podem ser assim explicitadas:

- Interpretação clássica. A probabilidade nessa perspectiva é a razão entre os casos favoráveis e o total de casos igualmente possíveis. Ela se embasa na ideia de que dois casos são igualmente prováveis, se não houver razão para preferir um em relação ao outro. Nessa visão, uma moeda honesta teria dois casos possíveis (cara e coroa), os quais têm a mesma chance de ocorrência. Nessa interpretação, defendida por Pierre Simon Laplace, está explícita a ideia de equiprobabilidade, que se aplica exclusivamente a situações com essa característica. Popper (1993, apud Araújo; Iglori, 2013) considera que a definição dessa teoria apresenta ambiguidade, pois pode ser interpretada do ponto de vista objetivo e subjetivo. Os autores chamam a atenção também para - supondo  $m$  os casos favoráveis e  $n$  os casos possíveis - o fato de, na propriedade,  $0 \leq P(A) \leq 1$ , o conhecimento prévio de  $m$  e  $n$  ser necessário; e para a impossibilidade de  $n$  ser igual ao infinito, pois, nesse caso, o quociente  $P(A)$  não teria sentido.
- Interpretação frequentista. Essa visão sugere que a repetição de uma experiência um grande número de vezes e a observação das frequências relativas de cada ocorrência convergem para uma probabilidade. Ou seja, considera-se que as probabilidades de cada evento se encontrariam no limite para um número infinito de repetição da experiência. Esse procedimento é usado nas ciências empíricas e é adequado a situações em que não existem eventos equiprováveis ou se desconheça essa característica, mas que os eventos sejam independentes. Um problema para essa abordagem é o número de repetições que possibilitem a convergência para uma fração indicativa de uma probabilidade aceitável. O conceito de “coletivo”, conforme Cabria (1992), foi desenvolvido por Von Mises para amenizar esse problema e, segundo Popper (1993 apud Araújo; Iglori, 2013), é útil para descrever repetição de eventos ou fenômeno de massa. Desse modo, um coletivo é, grosseiramente falando, uma sequência de eventos ou ocorrências, suscetível, em princípio, de continuidade indefinida, como, por exemplo, uma sequência de lan-

çamentos feita com um dado supostamente indestrutível. Cada um desses eventos apresenta certo caráter ou propriedade: por exemplo, o lançamento pode fazer com que apareça o número cinco e, assim, tem a propriedade cinco. Se tomarmos todos os lançamentos de propriedade cinco aparecidos até certa altura da sequência e dividirmos esse número pelo número total de lançamentos até esse momento (isto é, seu número ordinal na sequência), obteremos a frequência relativa de cinco até essa altura. Sendo assim, nessa compreensão, um coletivo ocorre quando uma sequência de eventos satisfaz os axiomas da convergência e o da aleatoriedade (ARAÚJO; IGLIORI, 2013).

- Interpretação logicista. Segundo esta visão, a probabilidade de uma crença mede o grau de confiança que se pode ter a respeito dela, tomando como base a evidência disponível. Nesse caso, a probabilidade  $p(h/e)$ , seria uma relação lógica entre proposições (hipótese  $h$  e as evidências disponíveis  $e$ ). A falta de critérios para determinar probabilidades iniciais gerou dificuldade para a aplicação dessa visão. Araújo e Iglori (2013), no entanto, consideram que ela evidencia o aspecto qualitativo da probabilidade.
- Interpretação subjetivista. Considerada uma evolução da interpretação logicista, esta interpretação admite que as probabilidades iniciais, com as quais os problemas reais são abordados, são sempre subjetivas, mas é possível melhorar essa avaliação subjetiva com base em novas evidências (CABRIA, 1992). Para isso, a relação entre as proposições  $h$  e  $e$  deveria ser dada pelo teorema de Bayes. Ou seja:  $p(h/e) = p(h) \cdot p(e/h) / p(e)$ .
- Interpretação intersubjetiva. Esta visão de probabilidade se origina do desenvolvimento da teoria subjetiva. Mas, neste caso, a probabilidade é vista como o grau de consenso de crença de um grupo social (ARAÚJO e IGLIORI, 2013). Neste caso, consideram que as nossas crenças são compartilhadas por um grande contingente dos membros de um grupo social, e é por meio das interações sociais com esse grupo que um indivíduo as adquire.
- Interpretação das propensões. Conforme Popper, citado por Freire Jr. (2004, p. 111), “[as probabilidades] caracterizam a disposição (ou a propensão) do arranjo experimental provocar certas frequências características quando o experimento é repetido muitas vezes”. Desse ponto de vista, essa interpretação da probabilidade se aplica a um evento único e busca resolver um problema da abordagem frequentista que se aplica apenas a uma sequência de eventos. A interpretação da probabilidade como propensão foi desenvolvida, conforme Freire Jr. (2004), por Popper em 1957. Sobre essa visão, o autor esclarece que probabilidades para eventos singulares têm significado, mas expressam as propriedades do objeto físico (no exemplo de Popper [1957], o dado) e das condições experimentais (no exemplo de Popper [1957], o procedimento do lançamento) nas quais estamos atribuindo probabilidade ao evento. Popper refere-se, então, à propensão, ou a tendências, de que, em dado arranjo experimental, o objeto se comporte de uma forma à qual possamos atribuir uma quantidade, ou seja, que nos permita atribuir a probabilidade (FREIRE JR. 2004, p. 111, grifos do autor). A probabilidade, nessa perspectiva, é compreendida como uma propriedade característica do dispositivo experimental, mais do que da sequência de eventos. Desse ponto de vista, é possível considerar que a atribuição da probabilidade  $1/6$  de sair o número 5 no lançamento de um dado deve-se à propriedade desse objeto, e não à sequência resultante de diversas jogadas.

Essas possíveis interpretações sobre o conceito de probabilidade nos encaminham a uma reflexão sobre o processo de educação estatística na infância. Deverá ser considerada uma abordagem

que envolva os trabalhos com jogos, que originaram as ideias probabilísticas, o levantamento e a organização de dados, essenciais para verificar a variabilidade em cada evento. Além disso, é essencial trabalhar com dados reais, quando possível, de forma a explorar as ideias de probabilidade e de estatística em situações próprias do contexto do aluno.

As questões filosóficas da probabilidade e da estatística nos auxiliam parcialmente a pensar sobre o estudo dessas temáticas na educação básica, porém, importa considerar o processo cognitivo, levando em consideração as fontes decorrentes de pesquisas com vertentes da psicologia.

## **O PENSAMENTO E RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO E ESTATÍSTICO**

A literatura em Educação Estatística tem discutido muito sobre o pensamento probabilístico e estatístico, bem como sobre o raciocínio probabilístico e estatístico. Então, cabe aqui refletirmos sobre o conceito de ambos.

Pensamento e raciocínio são dois processos mentais entre os quais uma diferença-chave pode ser discernida. A produção de pensamento pode ser consciente ou inconsciente. O raciocínio, diferentemente, é delimitado pelo consciente, com a utilização de lógica.

Lopes (2012) considera que o pensamento é trazido à existência através da atividade intelectual. É um produto da mente, que pode surgir mediante atividades racionais do intelecto ou por abstrações da imaginação.

O pensamento pode implicar uma série de operações racionais, como a análise, a síntese, a comparação, a generalização e a abstração. Por outro lado, devemos ter em conta que o pensamento não só é refletido na linguagem, como também a determina, pois ela trata de transmitir os conceitos, os juízos e os raciocínios do pensamento. Existem diferentes tipos de pensamento: o pensamento dedutivo vai do geral ao particular; o pensamento indutivo se encaminha do particular ao geral; o pensamento analítico consiste na separação do todo em partes, as quais são identificadas ou categorizadas; o pensamento sistêmico revela uma visão complexa de múltiplos elementos, com as suas diversas inter-relações; e o pensamento crítico avalia o conhecimento (LOPES, 2012, p. 161).

Dessa forma, o pensamento é o alicerce do conhecimento, e o raciocínio é uma parte do pensamento. Lopes (2012, p. 162) pondera que

o raciocínio é uma operação lógica, discursiva e mental. O intelecto humano utiliza uma ou mais proposições para concluir, por mecanismos de comparações e abstrações, quais são os dados que levam às respostas verdadeiras, falsas ou prováveis. Ele designa um ato mental ou um processo de pensamento necessário a um tipo de conhecimento mais imediato; e permite passar, de conhecimentos já adquiridos, para outros que se pretendem alcançar. Para isso, utiliza métodos de cálculo exato, como na matemática, e é considerado como rigoroso; ou, então, métodos não exatos, em situações da vida prática - como na estatística -, em que não dispomos de premissas exatas para levar à execução de uma ação.

Assim, o raciocínio é um processo de pensamento por meio do qual podemos justificar ou defender uma determinada conclusão, a partir de um conjunto de premissas. A explicação, a inferência, a verificação e a demonstração são formas de raciocínio que possibilitam estabelecer relações de consequência entre juízos (LOPES, 2012).



A análise de fenômenos de natureza aleatória exige o raciocínio estatístico - o qual tem uma natureza holística, envolvendo o processo como um todo, considerando, no entanto, cada parte que o compõe - e a incerteza é inerente à natureza desse tipo de fenômeno (LOPES, 2008).

Tais considerações remetem a uma Educação Estatística que se centre na promoção de condições para que os estudantes desenvolvam essas capacidades. Esse foco pode levá-los a construir competências para analisar dados de forma crítica a partir da consideração da natureza particular que lhes é própria (LOPES, 2008; MENDONÇA, 2008, 2015).

Complementam essas perspectivas educativas algumas definições de pensamento estatístico que o consideram como um processo de raciocínio que reconhece que a variação está em nosso contexto social e, portanto, presente em tudo que fazemos, particularmente quando identificamos, caracterizamos, quantificamos, controlamos e reduzimos variações (SNEE, 1990).

Moore (1990), citado por Chance (2002), propôs alguns elementos centrais do pensamento estatístico. São eles: a onipresença da variação; a necessidade de dados sobre processos; o planejamento de coleta de dados com a variação em mente; a quantificação da variação; e a explicação da variação.

Tais definições aqui apresentadas trazem a variação como um conceito primordial para compor o pensamento estatístico. Muitas vezes, “variação” e “variabilidade” são termos usados com certa equivalência. Entretanto, esse intercambiamento conceitual nem sempre é aplicado de forma apropriada. “Variabilidade” tem um sentido mais amplo, pois abrange não somente a variação, mas também a instabilidade e a falta de exatidão. Assim, ao adotar “variabilidade” em lugar de “variação”, conseguimos criar um sentido mais abrangente para o pensamento estatístico.

A variabilidade estará sempre presente entre produtos, pessoas, serviços, processos, natureza, etc. O importante é tentar descobrir: O que a variabilidade indica sobre os processos? Quais são as fontes de variação? Qual o entendimento que se tem dos conceitos de probabilidade e estatística para se compreender, estudar e controlar a variabilidade? Uma estratégia que vise à melhoria de processos passa, indiscutivelmente, pela definição de ações corretivas aplicadas a eles, as quais terão sua eficiência atrelada às respostas dessas questões.

A perspectiva de Wild e Pfannkuch (1999) sobre o raciocínio estatístico pode contribuir para a efetivação da Educação Estatística na forma como a concebemos. Para esses autores, o desenvolvimento do raciocínio estatístico é composto por alguns elementos.

O primeiro se refere ao reconhecimento da necessidade dos dados. Como apontam os autores, é importante perceber que a base da investigação estatística é a hipótese de que muitas situações da vida real só podem ser compreendidas a partir da análise de dados coletados de forma adequada, considerando que as experiências, a intuição ou as crenças pessoais são insuficientes para a tomada de decisão.

O segundo elemento, denominado transnumeração, indica a alteração da representação de dados no processo de descoberta de ideias, tendências ou estrutura a partir dos dados, para melhorar a compreensão da situação (PFANNKUCH; WILD, 2004). A linguagem gráfica é fundamental para a organização e a análise de dados. A pertinência da mudança de representação para a aprendizagem da Matemática também foi objeto de pesquisa em Coutinho, Silva e Almouloud (2011), e em Vertuan (2007) e revelou-se um recurso importante para a observação da adequação do modelo aos dados, aspecto que pode ser favorecido pelo uso da tecnologia.

A percepção sobre a variabilidade é o terceiro elemento e inclui a consideração de que, ao julgar situações, deve-se considerar a variabilidade que existe e se transmite nos dados, e o entendimento de que ela gera incerteza. Essa compreensão permite adotar estratégias em cada passo da investigação. Entender a variação como um comportamento inerente aos fenômenos aleatórios pode ser

explorado mesmo em níveis básicos da Educação. Estudantes do Ensino Fundamental podem desenvolver uma noção intuitiva de variação, ao observar que os resultados podem variar, dependendo da amostra obtida (MENDONÇA, 2015).

Como quarto elemento, temos o raciocínio com modelos. O ato de pensar requer o uso de modelos, já que os modelos conceituais são inerentes ao processo cognitivo (WILD; PFANNKUSH, 1999). No que se refere à Estatística, uma representação de dados pode ser expressa na forma de gráfico, de tabela, de uma reta de regressão ou de um resumo, que, nessa concepção, é um modelo representativo da realidade que pode permitir a observação do comportamento de uma variável. Assim, Batanero (2001, p. 1) considera que

[...] a construção de modelos, sua comparação com a realidade, seu aperfeiçoamento progressivo envolve cada fase da resolução de problemas estatísticos, não só na análise de dados em situações práticas, como também em trabalho de desenvolvimento teórico.

Nessa concepção, os modelos são linguagens por meio das quais os significados dos dados podem ser visualizados.

A integração da estatística com o contexto, último elemento elencado, consiste no entendimento de que os dados, observados sob a perspectiva dos conceitos estatísticos, pertencem a um contexto, e conhecê-lo é fundamental para a compreensão dos significados neles impressos. Pensar sobre esses dados, relacionando-os com o contexto que os gerou, possibilitará fazer juízos, perceber implicações e realizar conjecturas (WILD; PFANNKUSH, 1999).

Diante de tais elementos, os autores consideram que o desenvolvimento do raciocínio estatístico é favorecido na vivência em ambientes de ensino e aprendizagem, pautada em processos de investigação sobre circunstâncias reais, de modo que o aluno seja provocado a tomar decisões com base em dados.

Tais proposições remetem às recomendações de que é prudente pontuar que a condução desse processo exige uma intervenção problematizadora e dialógica (MENDONÇA, 2008, 2015).

Os elementos destacados por Wild e Pfannkuch (1999) evidenciam que as especificidades das situações de natureza aleatória requerem raciocínios específicos, os quais podem se valer de cálculos e de modelos matemáticos. Esses, portanto, são a expressão de relações idealizadas ou hipóteses estabelecidas na tentativa de encontrar respostas a questionamentos que surgem no decorrer do processo investigativo.

A partir dessa perspectiva, é preciso questionar: como promover condições para o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos estudantes? Os elementos apresentados anteriormente evidenciam a necessidade de um ambiente de aprendizagem no qual o aluno participe ativamente em um processo de investigação sobre temas e situações autênticos, para que nele se desencadeiem os raciocínios inerentes a cada etapa do processo.

Com tais indagações nos dispusemos a lançar olhares sobre alguns documentos curriculares que pudessem nos auxiliar na busca de indicadores para o estudo de probabilidade e estatística.

## **DOCUMENTOS CURRICULARES**

Escolhemos quatro documentos curriculares como norteadores de nossos processos reflexivos sobre o estudo da probabilidade e da estatística no Ensino Fundamental. Optamos pela Base Nacional

Comum Curricular (BNCC), por ser o documento que se encontra atualmente em discussão no âmbito das políticas públicas brasileiras. Os documentos da Austrália, da Inglaterra e do estado americano da Geórgia foram escolhidos por contemplar os temas de estudo da probabilidade e da estatística desde os anos iniciais da escolaridade. Uma síntese das informações está apresentada nos Anexos 1, 2, 3 e 4.

Há muitos pontos convergentes entre os quatro documentos analisados. No entanto, o documento australiano parece apresentar indicadores que melhor dialogam com os fundamentos filosóficos e psicológicos da probabilidade e da estatística. Dessa forma, não contemplaremos nesta discussão cada um dos documentos e nos deteremos no documento australiano.

No documento da Austrália, o início do estudo da probabilidade e da estatística considera aspectos de proximidade com a cultura familiar para aproximar as crianças da ideia de chance e de inferências simples. Na sequência, propõe percepções sobre provável/improvável e certo/incerto e indica a realização de atividades relacionadas ao cotidiano da criança.

Quanto à estatística no início da escolarização, o documento sugere a representação de dados por meio de objetos e desenhos. Além disso, pondera a possibilidade de reconhecer a variação por meio da realização de experimentos casuais.

Possibilitar às crianças a identificação de questões a serem investigadas, auxiliá-las na busca de coleta, na organização e na representação de dados é instrumentalizá-la para sua leitura de mundo.

Destaca-se, nos indicadores australianos, a proposta de identificar eventos em que a chance de um não seja afetada pela ocorrência do outro. Também se ressalta como relevante que as crianças tenham a oportunidade de realizar perguntas da pesquisa, de criar métodos de coleta de dados e folhas de registro. Após tais etapas, é importante que elas produzam um relatório sobre suas conclusões acerca do tema investigado e criem uma forma de divulgar à população investigada os resultados encontrados. Dessa maneira, perceberão o aspecto fundamental da estatística em relação ao desenvolvimento social.

Outra questão destacada é a possibilidade de uso de tecnologias digitais para o processo de organização, representação e divulgação dos dados, ressaltando a importância da imagem na comunicação.

O conceito de variabilidade recebe destaque desde o início da escolarização, assim como a identificação de resultados de experiências com o azar, ressaltando que os resultados são igualmente prováveis e representando as probabilidades desses resultados com o uso de frações. O reconhecimento das probabilidades variando no intervalo de 0 a 1 é recomendado desde os 10 anos de idade.

A descrição e a interpretação de dados decorrentes de contextos diversos é um importante indicador para a compreensão do tema em estudo, da mesma forma que a comparação de frequências observadas através de experimentos com frequências esperadas.

A interpretação e a comparação de diferentes representações gráficas, de acordo com sua adequação, devem ocorrer já na primeira fase dos anos iniciais do ensino fundamental. Também se recomenda construir diferentes espaços amostrais e determinar probabilidades relativas a eles.

Da mesma forma, são indicadas a identificação de questões que envolvem dados numéricos relativos a contextos dos estudantes; a investigação sobre elas; a construção e a comparação de série de dados; e o cálculo de medidas estatísticas de posição e dispersão, a fim de descrever e interpretar dados.

Em relação à probabilidade, os indicadores seguem em direção à identificação de eventos complementares e à utilização da soma das probabilidades para resolver problemas. A descrição de eventos, utilizando a linguagem de probabilidade, e a representação de eventos em tabelas de dupla entrada e diagramas de Venn são essenciais para a resolução de problemas. Indicam-se também: a

listagem de todos os resultados para experiências casuais de duas e três etapas, utilizando diagramas de árvore; a investigação do conceito de independência; e o uso da linguagem probabilística.

É recomendado que os processos investigativos utilizem técnicas de coleta de dados e que obtenham dados por meio de amostragem. Sugere-se também que o cálculo de frequências relativas de dados fornecidos ou recolhidos para estimar probabilidades de eventos envolva “e” ou “ou”; e que ocorram a determinação de quartis e a construção e a interpretação de *box-plots* para comparar conjuntos de dados.

Complementando o estudo estatístico, justifica-se a realização de comparação de histogramas e gráficos de pontos correspondentes e o uso de gráficos de dispersão para investigar as relações entre duas variáveis numéricas.

Todo esse processo de investigação estatística deve resultar na elaboração de relatórios que permitam a comunicação de resultados conclusivos sobre a análise dos dados.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os indicadores de estudos apontados nos currículos de matemática selecionados para a análise deste artigo evidenciam que promover a apropriação do conhecimento probabilístico e do estatístico, de forma integrada ao desenvolvimento das outras disciplinas durante o Ensino Fundamental possibilita ao estudante ampliar a leitura de sua realidade e sua habilidade em investigar e interpretar os diferentes contextos.

As considerações filosóficas e psicológicas apresentadas são convergentes com os indicadores apresentados nos currículos selecionados e demonstram que o desenvolvimento dessas duas temáticas historicamente está atrelado ao movimento presente nos eventos cotidianos e científicos. Tal fato remete às recomendações sobre a importância de os estudantes terem garantido, desde o início da escolaridade, o direito à aprendizagem probabilística e estatística.

A abordagem de conceitos e procedimentos probabilísticos e estatísticos não está vinculada ao uso de algoritmos complexos e a soluções com significativo nível de abstração. Evidencia-se que o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e estatístico não requer processos rigorosos de abordagem.

Podemos considerar que o raciocínio probabilístico e o estatístico apresentam semelhanças e diferenças e, portanto, são compatíveis para serem abordados intrinsecamente.

A abordagem desses conhecimentos dialoga com as perspectivas investigativas para o ensino e a aprendizagem. Portanto, sugerimos que, como educadores matemáticos que visam ao sucesso das crianças e dos jovens, possibilitemos a eles a aprendizagem probabilística e estatística desde o seu ingresso na escola.

## REFERÊNCIAS

ABE, Thatiana Sakate. **Propostas de engenharia didática para o ensino de probabilidades nos anos finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011. 197 f.

ARAÚJO, Péricles C.; IGLIORI, Sonia B. O problema epistemológico da probabilidade. **Caderno da Física da UEFS**, Feira de Santana, v. 11, n. 12, p. 57-75, 2013. Disponível em: <<https://goo.gl/VvNOU4>>. Acesso em: set. 2016.

- BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada, Espanha, 2001. Disponível em: <<https://goo.gl/E5b49D>>. Acesso em: 15 set. 2016.
- BRUNER, Jerome S. The growth of mind. **American Psychologist**, Washington, v. 20, p. 1007-1017, 1965.
- BRUNER, Jerome S. **Uma nova teoria da aprendizagem**. Rio de Janeiro: Bloch, 1976.
- CABRIA, Segundo. **Filosofia de la Probabilidade**. Valência: Tirant lo Blanch, 1992.
- CHANCE, Beth L. Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. **Journal of Statistics Education**, Alexandria, v. 10, n. 3, 2002. Disponível em: <<https://goo.gl/HEetlL>>.
- COUTINHO, Cileda Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática** - UFSC, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007.
- COUTINHO, Cileda Q. S.; SILVA, Maria José F.; ALMOULOU, Saddo. Desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 24, n. 39, p. 495-514, ago. 2011.
- D'AMBROSIO, Beatriz S. **Living contradictions: Negotiating practices as Mathematics teacher educators**. Presentation at AMTE, Irvine/CA. Feb. 7, 2014. Disponível em: <<https://goo.gl/xgbXZf>>. Acesso em: 13 set. 2016.
- DAMINELLI, Elisa. **Uma proposta de ensino de estatística na 8ª série/9º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. 129f.
- FERNANDES, Rubia J. G. **Estatística e probabilidade: uma proposta para os anos iniciais do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2014. 191f.
- FREIRE JR., Olival. Popper, Probabilidade e Mecânica Quântica. **Episteme**, Porto Alegre, n. 18, p. 103-127, jan./jun. 2004.
- GARCIA, Fernanda de Mello. **A ideia de variabilidade abordada no 8º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. 110 f.
- GONÇALVES, Harryson J. L. **A educação estatística no ensino fundamental: discussões sobre a práxis de professoras que ensinam matemática no interior de Goiás**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2005. 143 f.
- HACKING, Ian. On the foundations of Statistics. **The British Journal for the Philosophy of Science**, Oxford - United Kingdom, v. 15, n. 57, p. 1-26, May 1964.
- LOPES, Celi E. **A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998. 148 f.
- LOPES, Celi E. Reflexões teórico-metodológicas para a educação estatística. In: LOPES, Celi E.; CURI, Edda (Org.). **Pesquisas em educação matemática: um encontro entre a teoria e a prática**. São Carlos: Pedro e João Editores, 2008. p. 67-86.

LOPES, Celi E. A educação estocástica na infância. **Revista Eletrônica de Educação** - UFSCar, São Carlos, SP, v. 6, n. 1, p. 160-174, maio 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br>>. Acesso em: 10 set. 2016.

MENDONÇA, Luzinete O. **A Educação Estatística em um ambiente de modelagem matemática no ensino médio**. 2008. 233 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008.

MENDONÇA, Luzinete O. **Reflexões e ações de professores sobre modelagem matemática na Educação Estatística em um grupo colaborativo**. 2015. 250 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

OLIVEIRA, Maria M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis: Vozes, 2007.

PFANNKUCH, Maxine; WILD, Chris. Towards an understanding of statistical thinking. In: BEN-ZVI, Dani; GARFIELD, Joan B. (Ed.). **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 2004.

ROTUNNO, Sandra A. M. **Estatística e Probabilidade: um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007. 117 f.

SNEE, Ronald D. Statistical thinking and its contribution to total quality. **The American Statistician**, Abingdon, v. 44, n. 2, p. 116-121, 1990.

SOUZA, Leandro de O. **A Educação Estatística no Ensino Fundamental e os recursos tecnológicos**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2009. 192f.

VERTUAN, Rodolfo. **Um olhar sobre a Matemática à luz dos registros de representações semióticas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2007.

VYGOSTKY, Lev S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

VYGOSTKY, Lev S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

WILD, Chris; PFANNKUCH, Maxine. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistics Review**, Malden/MA, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999.

---

**RECEBIDO EM:** 20 set. 2016.

**CONCLUÍDO EM:** 26 out. 2016.

## ANEXO 1 - INDICADORES PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE E DA ESTATÍSTICA NO CURRÍCULO ESCOLAR DO ESTADO AMERICANO DA GEÓRGIA

Faixa etária	Indicadores
<b>6 a 10 anos</b>	<p><b>Nível 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Classificar, contar organizar, representar e interpretar os dados (inicialmente com três categorias);</li> <li>• Perguntar e responder perguntas sobre conjunto de dados em cada categoria e compará-las (maior, menor, total etc.).</li> </ul> <p><b>Nível 2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desenhar pictogramas de barras (inicialmente com escala em unidades) para representar um conjunto por categorias;</li> <li>• Resolver e comparar problemas usando informação apresentadas em um gráfico de barras;</li> <li>• Gerar dados de medição medindo comprimentos de vários objetos para a unidade mais próxima, ou fazendo medições repetidas do mesmo objeto. Mostrar as medições fazendo um gráfico de linha, onde a escala horizontal é tícada em unidades de números inteiros.</li> </ul> <p><b>Nível 3</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desenhar um pictograma dimensionado e um gráfico de barras escalado para representar um conjunto de dados com várias categorias;</li> <li>• Resolver, em um e dois passos, problemas que envolvem a ideia de “quantos mais” e “quantos menos”, usando informações apresentadas em gráficos de barras em escala. Por exemplo, desenhar um gráfico de barras em que cada quadrado no gráfico de barras pode representar cinco animais de estimação.</li> </ul> <p><b>Nível 4</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fazer um gráfico de linha para exibir um conjunto de dados de medições em frações de unidade;</li> <li>• Resolver problemas envolvendo adição e subtração de frações com denominadores comuns, usando as informações apresentadas em gráficos de linha. Por exemplo, a partir de um gráfico de linha, encontrar e interpretar a diferença de comprimento entre as amostras de maior e menor em uma coleção de insetos.</li> </ul> <p><b>Nível 5</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gerar dados por meio de medições e desenhar gráfico de linha com frações da unidade (<math>1/2</math>, <math>1/4</math> e <math>1/8</math>);</li> <li>• Usar operações em frações para resolver problemas que envolvam as informações apresentadas em gráficos de linha. Por exemplo, dadas as diferentes medições de líquidos em copos idênticos, encontrar a quantidade de líquido que cada copo conteria, se o montante total em todos os copos fossem redistribuídos igualmente.</li> </ul>
<b>11 a 13 anos</b>	<p><b>Nível 6</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer uma questão estatística como aquele que antecipa variabilidade dos dados relacionados com a pergunta e as respostas dão indícios dessa variedade;</li> <li>• Entender que um conjunto de dados recolhidos para responder a uma pergunta estatística tem uma distribuição que pode ser descrita por seu centro, pela propagação e pela forma geral;</li> <li>• Reconhecer que uma medida de centro de um conjunto de dados numéricos resume todos os seus valores com um único número, enquanto uma medida de variação descreve como seus valores variam de acordo com um único número;</li> <li>• Apresentar dados numéricos em parcelas em uma reta de número, incluindo gráficos de pontos, histogramas e diagramas de caixa;</li> <li>• Relatar o número de observações, descrever a natureza do atributo sob investigação, incluindo como ele foi medido e suas unidades de medida;</li> <li>• Calcular medidas quantitativas de centro (mediana e/ou média) e de variabilidade (intervalo interquartil);</li> <li>• Relacionar a escolha das medidas de centro e variabilidade com a forma da distribuição dos dados e o contexto no qual eles foram gerados.</li> </ul>

<p><b>11 a 13 anos</b></p>	<p><b>Nível 7</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender que a amostragem aleatória tende a produzir amostras representativas e apoiar inferências válidas;</li> <li>• Usar dados de uma amostra aleatória para fazer inferências sobre uma população e as medidas de centro e de variabilidade para fazer inferências comparativas informais sobre duas populações;</li> <li>• Avaliar, informalmente, o grau de sobreposição visual de duas distribuições de dados numéricos com variabilidades semelhantes, medindo a diferença entre as medianas, expressando-o como um múltiplo do intervalo interquartil;</li> <li>• Usar medidas de centro e medidas de variabilidade para dados numéricos a partir de amostras aleatórias, para fazer inferências comparativas informais sobre duas populações.</li> <li>• Probabilidade</li> <li>• Compreender que a probabilidade de um acontecimento fortuito é um número entre 0 e 1;</li> <li>• Coletar dados em processo de chance, observando sua frequência relativa a longo prazo, e prever a frequência relativa aproximada dada a probabilidade;</li> <li>• Desenvolver um modelo de probabilidade e usá-lo para encontrar probabilidades de eventos;</li> <li>• Comparar probabilidades experimentais e teóricas de eventos.</li> </ul> <p><b>Nível 8</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construir e interpretar gráficos de dispersão para os dados bivariados para investigar padrões de associação entre duas grandezas;</li> <li>• Descrever padrões tais como agrupamentos, valores atípicos, associação positiva ou negativa, associação linear e associação não linear;</li> <li>• Compreender que as linhas retas são usadas para modelar as relações entre duas variáveis quantitativas, e a tabela de dupla entrada (frequências relativas) para observar relações entre variáveis qualitativas;</li> <li>• Avaliar informalmente a adequação do modelo de ajuste, julgando a proximidade dos pontos de dados para a linha.</li> </ul>
<p><b>14 a 16 anos</b></p>	<p><b>Níveis de 9 a 12</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desenvolver o raciocínio estatístico, o que ocorre por meio de projetos de investigação estatística onde os alunos devem:</li> <li>• formular perguntas a serem respondidas usando dados;</li> <li>• planejar e implementar um plano para recolher os dados adequados, apoiando-se em recursos tecnológicos;</li> <li>• selecionar métodos gráficos e numéricos adequados para a análise de dados;</li> <li>• interpretar os seus resultados para fazer conexões com a questão inicial.</li> </ul>



## ANEXO 2 - INDICADORES PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE E DA ESTATÍSTICA NO DOCUMENTO BRASILEIRO BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Faixa etária	Indicadores
6 a 10 anos	<p><b>1º ano</b></p> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “prováveis”, “pouco prováveis”, “improváveis”;</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Coletar dados em uma pesquisa envolvendo situações do interesse dos estudantes;</li> <li>Organizar os resultados por meio de representações pessoais.</li> </ul> <p><b>2º ano</b></p> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como: “prováveis”, “pouco prováveis”, “improváveis”, apropriando-se da linguagem probabilística;</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ler, identificar e comparar informações apresentadas em tabela simples ou em gráficos de colunas (maior ou menor frequência);</li> <li>Coletar dados por meio de pesquisa, tendo como universo, inicialmente, a própria sala de aula; depois, outros contextos e organizar os resultados e representá-los por meio de tabelas e/ou gráficos de colunas.</li> </ul> <p><b>3º ano</b></p> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar, em eventos familiares aleatórios, a variação dos resultados possíveis, como, por exemplo, o conjunto de respostas possíveis para uma pergunta, os resultados possíveis em sorteio.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ler, interpretar e comparar dados apresentados em uma tabela simples, tabela de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, para localizar um dado, o resultado de maior ou de menor frequência; ordenar resultados; determinar a diferença entre dois resultados, entre outros, apropriando-se desse tipo de linguagem para melhor compreender aspectos da realidade sociocultural.</li> <li>Organizar os resultados da pesquisa e representa-los por meio de tabelas e/ou gráficos de colunas.</li> </ul> <p><b>4º ano</b></p> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar, dentre eventos cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência (sem recorrer à quantificação).</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ler, interpretar e comparar dados apresentados em uma tabela simples, tabela de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo informações oriundas de outras áreas de conhecimento e produzir um texto a partir de suas observações.</li> <li>Coletar dados em uma pesquisa (variáveis categóricas e numéricas), considerando populações além do universo da sala de aula, organizar os resultados e representá-los por meio de listas, tabelas, gráfico de colunas simples, incluindo o uso de tecnologias digitais.</li> </ul> <p><b>5º ano</b></p> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório e reconhecer se os resultados são ou não igualmente prováveis.</li> <li>Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos simples em situação em que os resultados são equiprováveis.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ler, interpretar e resolver problemas envolvendo dados estatísticos (textos, tabelas e gráficos), das diversas áreas de conhecimento.</li> <li>Coletar dados em uma pesquisa (variáveis categóricas e numéricas), considerando populações além do universo da sala de aula; organizar os resultados; selecionar e produzir a representação mais adequada (texto, tabelas e gráficos) para comunicá-los.</li> </ul>

<p><b>11 a 14 anos</b></p>	<p><b>6º ano</b>  <b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Indicar a probabilidade de um evento por um número racional (na forma fracionária, decimal e percentual).</li> <li>Analisar o significado da probabilidade por meio de experimentos.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar, nos gráficos de barras ou colunas (simples ou múltiplas), as variáveis e os elementos que os constituem (título, eixos, legenda e fonte).</li> <li>Interpretar tabelas e gráficos de barras e setores (da mídia), elaborando textos para apresentar considerações sobre os resultados.</li> </ul> <p><b>7º ano</b>  <b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender o significado de termos como “aleatoriedade”, “espaço amostral”, “resultados favoráveis”, “probabilidade”, “tentativas”, “experimentos equiprováveis”, dentre outros. Aplicar esse conhecimento em planejamento de experimentos aleatórios ou simulações e resolução de problemas que envolvem estimar ou calcular probabilidades obtidas por meio de frequência.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender o significado de média como um indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor.</li> <li>Relacionar a média, intuitivamente, com a variabilidade dos dados considerando que dois conjuntos de dados podem ter a mesma média e ser distribuídos com amplitudes diferentes.</li> </ul> <p><b>8º ano</b>  <b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Calcular a probabilidade de eventos, a partir da construção de um espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo.</li> <li>Reconhecer que a soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral é igual a 1.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar, em gráficos de barras, colunas ou setores, divulgados pela mídia, as variáveis e seus valores, os resultados e os elementos constitutivos do gráfico (título, eixos, legenda e fonte), interpretando-os para analisar a adequação do gráfico ao tema e aos dados e para propor outras formas de comunicação dos resultados da pesquisa, tais como texto escrito ou outro tipo de gráfico.</li> </ul> <p><b>9º ano</b>  <b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolher e construir o gráfico adequado para apresentar um determinado conjunto de dados (colunas, setores, linhas e histogramas).</li> <li>Destacar as medidas de tendência central em um relatório descritivo de uma análise.</li> <li>Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores, identificando as condições e as variáveis adequadas para esse tipo de representação.</li> <li>Planejar e executar uma pesquisa (com tema da realidade social), identificando a população e a necessidade de usar amostra.</li> <li>Comunicar, por meio de relatório escrito, contendo o cálculo de médias, tabelas e gráficos com o apoio de planilhas eletrônicas.</li> </ul>
----------------------------	--

### ANEXO 3 - INDICADORES PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE E DA ESTATÍSTICA NO CURRÍCULO ESCOLAR DA INGLATERRA

Faixa etária	Indicadores
6 anos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretar e construir pictogramas simples, gráfico de registro, diagramas de barras e tabelas simples.</li> <li>• Perguntar e responder a perguntas simples envolvendo o número de objetos em cada categoria e classificação das categorias por quantidade.</li> <li>• Perguntar e responder a perguntas sobre um grupo de dados e comparar dados de diferentes categorias.</li> <li>• Registrar, interpretar, confrontar, organizar e comparar as informações (por exemplo, usando a correspondência um a um).</li> </ul>
7 anos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretar e apresentar dados, usando gráficos de barras, pictogramas e tabelas.</li> <li>• Responder perguntas de uma e de duas etapas, usando informações apresentadas em gráficos de barras em escala, pictogramas e tabelas.</li> <li>• Compreender e utilizar escalas simples em pictogramas e gráficos de barras com precisão cada vez maior.</li> <li>• Interpretar dados apresentados nos mais variados contextos.</li> </ul>
8 anos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretar e apresentar dados discretos e contínuos, usando métodos gráficos apropriados, incluindo gráfico de barras e de linha.</li> <li>• Resolver problemas de comparação, soma e diferença, usando informações apresentadas em gráficos de barras, pictogramas, tabelas e outros gráficos.</li> <li>• Compreender e utilizar uma gama maior de escalas nas representações.</li> <li>• Usar a representação gráfica dos dados para mostrar mudanças ao longo do tempo.</li> </ul>
9 anos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver problemas de comparação, soma e diferença, usando informações apresentadas em um gráfico de linha.</li> <li>• Ler e interpretar informações em tabelas, incluindo horários.</li> <li>• Conectar o trabalho sobre coordenadas e escalas na interpretação de gráficos de tempo.</li> <li>• Escolher as representações apropriadas para um determinado conjunto de dados e justificar sua escolha.</li> </ul>
10 anos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretar e construir gráficos de setores e de linha e usá-los para resolver problemas.</li> <li>• Calcular e interpretar a média.</li> <li>• Conectar seu conhecimento em ângulos, frações e percentagens para a interpretação dos gráficos de setores.</li> <li>• Identificar e desenhar gráficos relativos a duas variáveis, decorrentes de seu próprio inquérito e de outras pesquisas.</li> <li>• Fazer conversão de quilômetros para milhas na medição de sua representação gráfica.</li> <li>• Identificar quando é apropriado encontrar a média de um conjunto de dados.</li> </ul>
De 11 a 13 anos	<p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Descrever, interpretar e comparar distribuições de uma única variável, através de representação gráfica adequada, envolvendo dados discretos, contínuos e agrupados e medidas adequadas de tendência central (média, moda, mediana) e dispersão (variação, observação sobre dados dispersos...).</li> <li>• Construir e interpretar tabelas, gráficos e diagramas, incluindo tabelas de frequência, gráficos de barras, gráficos circulares e pictogramas para dados categóricos e de linha para dados numéricos não agrupados e agrupados.</li> <li>• Descrever relações matemáticas simples entre duas variáveis em contextos de observação e experimentais e ilustrar, usando gráficos de dispersão.</li> </ul> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Registrar, descrever e analisar a frequência de resultados de experimentos simples envolvendo aleatoriedade, justiça, igualdade e resultados de eventos equiprováveis e não equiprováveis, usando uma linguagem apropriada e a escala 0-1 de probabilidade.</li> <li>• Compreender que a soma de todas as probabilidades de um evento é igual a 1.</li> <li>• Enumerar conjuntos e interseções de conjuntos sistematicamente, usando tabelas, grades e diagramas de Venn.</li> <li>• Gerar espaços amostrais teóricos para eventos individuais e combinados com resultados igualmente prováveis mutuamente exclusivos e usá-los para calcular probabilidades teóricas.</li> </ul>

<b>De 14 a 16 anos</b>	<p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Inferir as populações ou distribuições a partir de uma amostra, conhecendo as limitações de uma amostragem.</li> <li>• Interpretar e construir tabelas e gráficos de linha para série de dados.</li> <li>• Construir e interpretar diagramas para dados discretos agrupados e dados contínuos, histogramas (com intervalos de classe iguais e desiguais) e gráficos de frequência acumulada, e conhecer a adequação do seu uso.</li> <li>• Interpretar, analisar e comparar distribuições de conjuntos de dados a partir de distribuições empíricas univariadas, por meio de representação gráfica adequada e envolvendo dados discretos, contínuos e agrupados, (incluindo gráficos de caixas) e medidas de tendência central adequadas (incluindo classe modal) e propagação (incluindo quartis e intervalo inter-quartil).</li> <li>• Aplicar estatística para descrever uma população e interpretar gráficos de dispersão de dados bivariada.</li> <li>• Reconhecer correlação e saber que ela não indica causalidade.</li> <li>• Desenhar linhas estimadas de melhor ajuste.</li> <li>• Fazer previsões e interpolar e extrapolar as tendências aparentes, conhecendo os perigos de fazê-lo.</li> </ul> <p><b>Probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Consolidar conteúdo dos estágios anteriores.</li> <li>• Aplicar a propriedade: Se A, B, C, ... são eventos mutuamente exclusivos e exaustivos, então: <math>P(A \text{ ou } B \text{ ou } C \text{ ou } \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots = 1</math>.</li> <li>• Usar um modelo de probabilidade para prever os resultados de experimentos futuros.</li> <li>• Entender que as amostras imparciais empíricas tendem para distribuições de probabilidades teóricas, com o aumento do tamanho da amostra.</li> <li>• Calcular a probabilidade de eventos combinados dependentes e independentes, incluindo o uso de diagramas de árvores e outras representações, e conhecer os pressupostos subjacentes.</li> <li>• Calcular e interpretar as probabilidades condicionais através da representação, usando frequências com tabelas de dupla entrada, diagramas de árvores e diagramas de Venn.</li> </ul>
------------------------	---

## ANEXO 4 - INDICADORES PARA O ESTUDO DA PROBABILIDADE E DA ESTATÍSTICA NO CURRÍCULO ESCOLAR DA AUSTRÁLIA

Faixa etária	Indicadores
6 anos	<p><b>Chance (Probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar resultados de eventos familiares envolvendo acaso e descrevê-los usando a linguagem cotidiana, tais como “vai acontecer”, “não vai acontecer” ou “pode acontecer”.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Responder sim ou não para recolher informações e fazer inferências simples.</li> </ul>
7 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar atividades práticas e eventos diários que envolvem acaso. Descrever os resultados como “provável” ou “improvável” e identificar alguns eventos como “certo” ou “impossível”.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Escolher perguntas simples para obter respostas e fazer inferências simples.</li> <li>Representar dados com objetos e desenhos, em que esses representam um valor de dados. Descrever as exibições.</li> </ul>
8 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conduzir experimentos casuais, identificar e descrever os possíveis resultados e reconhecer variação nos resultados.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar uma questão de interesse com base em uma variável categórica. Reunir dados relevantes para a questão.</li> <li>Coletar, verificar e classificar dados.</li> <li>Criar exibições de dados usando listas, tabelas e pictogramas e interpretá-los.</li> </ul>
9 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Descrever possíveis eventos diários e encomendar as suas chances de ocorrência.</li> <li>Identificar eventos diários que não podem acontecer se o outro acontece.</li> <li>Identificar eventos em que as chances de um não serão afetadas pela ocorrência do outro.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Selecionar métodos experimentais para a coleta de dados, incluindo perguntas da pesquisa e folhas de registro.</li> <li>Construir exibições de dados adequados, com e sem o uso de tecnologias digitais, a partir de dados fornecidos ou recolhidos. Incluir tabelas, gráficos de colunas e pictogramas, onde uma imagem pode representar muitos valores de dados.</li> <li>Avaliar a eficácia das diferentes exibições para ilustrar características de dados, incluindo variabilidade.</li> </ul>
10 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar resultados de experiências de azar em que os resultados são igualmente prováveis e representar as probabilidades desses resultados usando frações.</li> <li>Reconhecer que as probabilidades variam de 0 a 1.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Fazer perguntas e recolher dados categóricos ou numéricos por observação ou por pesquisa.</li> <li>Construir modelos, incluindo gráficos de colunas e gráficos de pontos, de acordo com o tipo de dados, com e sem o uso de tecnologias digitais.</li> <li>Descrever e interpretar conjuntos de dados advindos de diferentes contextos.</li> </ul>
11 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Descrever probabilidades, usando frações, decimais e porcentagens.</li> <li>Conduzir experimentos casuais com pequenos e grandes números de ensaios, utilizando tecnologias digitais apropriadas.</li> <li>Comparar frequências observadas através de experimentos com frequências esperadas.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretar e comparar uma série de exibições de dados, incluindo também gráficos de colunas de duas variáveis categóricas.</li> <li>Interpretar dados secundários apresentados em mídia digital e em outros meios de comunicação.</li> </ul>

12 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construir espaços amostrais para experimentos de passo único com resultados igualmente prováveis.</li> <li>• Atribuir probabilidades para os resultados dos eventos e determinar suas probabilidades.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar e investigar questões que envolvem dados numéricos recolhidos a partir de fontes primárias e secundárias.</li> <li>• Construir e comparar exibições de série de dados, incluindo gráficos de ramo e folhas e de pontos.</li> <li>• Calcular média, mediana, moda e intervalo para conjuntos de dados e interpretar essas estatísticas no contexto de dados.</li> <li>• Descrever e interpretar dados usando mediana, média e amplitude.</li> </ul>
13 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar eventos complementares e utilizar a soma das probabilidades para resolver problemas.</li> <li>• Descrever os eventos, usando a linguagem de probabilidade como: “pelo menos”, exclusive “ou” (A ou B, mas não ambos), inclusive “ou” (A ou B ou ambos) e “e”.</li> <li>• Representar eventos em tabelas de dupla entrada e diagramas de Venn e resolver problemas relacionados.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Investigar técnicas de coleta de dados, incluindo censo, amostragem e observação.</li> <li>• Explorar os aspectos práticos e as implicações da obtenção de dados por meio de amostragem, utilizando uma variedade de processos de investigação.</li> <li>• Explorar a variação das médias e as proporções das amostras aleatórias retiradas da mesma população.</li> <li>• Investigar o efeito dos valores dos dados individuais, incluindo valores atípicos, na média e na mediana.</li> </ul>
14 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Listar todos os resultados para experiências casuais de duas etapas, com e sem substituição, usando diagramas de árvore ou matrizes. Atribuir probabilidades para os resultados e determinar probabilidades para os eventos.</li> <li>• Calcular frequências relativas de dados fornecidos ou recolhidos para estimar probabilidades de eventos que envolvam “e” ou “ou”.</li> <li>• Investigar relatos de pesquisas em mídia digital e em outros lugares, para obter informações sobre como os dados foram obtidos para estimar a população médias e medianas.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar questões cotidianas que envolvem pelo menos uma série numérica e pelo menos uma variável categórica e recolher dados diretamente e de fontes secundárias.</li> <li>• Construir gráficos de ramo e folha e histogramas para descrever os dados e usar linguagem estatística na análise dos dados, incluindo “enviesado”, “simétrica” e “bimodal”.</li> <li>• Comparar e exibir dados, usando média, mediana e intervalo para descrever e interpretar conjuntos de dados numéricos em termos de localização (centro) e dispersão.</li> </ul>
15 anos	<p><b>Chance (probabilidade)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar a linguagem probabilística como: “se .... então”, “dado”, “de”, “saber que”, para investigar declarações condicionais e identificar erros comuns na interpretação de tal linguagem.</li> <li>• Descrever os resultados de duas e experiências casuais três etapas, com e sem substituições, atribuir probabilidades para os resultados e determinar probabilidades de eventos. Investigar o conceito de independência.</li> </ul> <p><b>Estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinar quartis e intervalo interquartil.</li> <li>• Construir e interpretar diagramas de caixa (<i>box-plot</i>) e usá-los para comparar conjuntos de dados.</li> <li>• Comparar histogramas e gráficos de pontos correspondentes.</li> <li>• Usar gráficos de dispersão para investigar sobre as relações entre duas variáveis numéricas.</li> <li>• Investigar e descrever dados numéricos bivariados onde a variável independente é o tempo.</li> <li>• Avaliar relatórios estatísticos nos meios de comunicação e outros lugares, ligando as reivindicações expostas às estatísticas e os dados apresentados.</li> </ul>