VIDYA, v. 36, n. 1, p. 135-160, jan./jun., 2016 - Santa Maria, 2016. **ISSN** 2176-4603

O RACIOCÍNIO ALGÉBRICO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM TIMOR - LESTE: ANÁLISE DE UM INQUÉRITO POR QUESTIONÁRIO

ALGEBRAIC THINKING OF PRE - SERVICE MATHEMATICS TEACHERS IN EAST TIMOR: ANALYSIS OF A SURVEY QUESTIONNAIRE

LUCIA YENI WULANDARI SUHARMAN*
TERESA BIXIRÃO NETO**

RESUMO

A formação inicial de professores é considerada como uma fase importante para dotar os futuros professores com uma boa qualidade de conhecimento matemático e didático. A avaliação do raciocínio algébrico (RA) de futuros professores de matemática é um meio para ter informações relativamente aos seus conhecimentos e através desse *feedback* contribuir para a melhoria dos programas de formação. No presente trabalho apresenta-se os resultados de um estudo envolvendo a análise dos níveis de raciocínio algébrico através de um inquérito por questionário aplicado a vinte e quatro futuros professores de matemática em Timor-Leste. As tarefas algébricas apresentadas no questionário, têm em conta os processos de generalização, simbolização, bem como, a modelação estrutural e funcional e o cálculo analítico. Uma análise do conteúdo aplicada neste estudo, permitiu identificar várias soluções incorretas e, muitas vezes, a utilização de um raciocínio aritmético em detrimento da utilização de raciocínio algébrico. O estudo recomenda uma ação formativa que permita desenvolver, habilidades didático - matemáticas para as práticas de ensino que envolvam o raciocínio algébrico.

Palavra-Chave: Raciocínio Algébrico. Formação de Professores. Avaliação. Análise Cognitiva e Epistémica.

ABSTRACT

The initial teacher-training program is an important step to provide future teachers with a framework for good quality in teaching and expertise. Evaluation of algebraic reasoning (RA) of future math teachers provides a method to obtain information on the knowledge they have, as well as a feedback that contributes to the improvement of the training programs. The aim of study is to present the results of a pilot study involving the analysis of algebraic reasoning levels through a questionnaire survey applied to twenty four pre-service mathematics teachers in East Timor. The algebraic tasks presented in the questionnaire take into account the processes of generalization, symbolization, as well as structural and functional modeling and analytical calculation. The application of content analyze in this study, identified a low level of algebrization that was found by several incorrect solutions and, mostly, by the utilization of arithmetical reasoning. The study recommends a formative action that allows to develop didactic skills - mathematical on activities that involved an algebraic reasoning.

Keyword: *Algebraic Reasoning. Teacher-training program. Evaluation. Cognitive and epistemic analysis.*

* Professora no Departamento do Ensino da Matemática, Universidade Nacional de Timor Lorosa'e - Timor - Leste, lysuharman@ua.pt
** Professora no Departamento da Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro - Portugal, teresaneto@ua.pt

INTRODUÇÃO

Várias investigações no âmbito do ensino de matemática (AKÉ, 2013; BLANTON e KAPUT, 2005; BRANCO e PONTE, 2012; CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007; EUGENIO, ROJANO e PUIG, 2007; GODINO, AKÉ, GONZATO e WILHELMI, 2014), manifestam preocupação e interesse na melhoria do ensino de Álgebra relacionado com: os fenómenos de ensino, os domínios de conceitos e os procedimentos algébricos. Para Socas (2011), a Álgebra tem uma grande presença como conteúdo matemático em diferentes fases do sistema educativo, especialmente, a partir do secundário para a universidade, embora nos últimos vinte anos tem havido propostas para incorporar certas questões do Pensamento Algébrico no Ensino Básico. Na formação de professores de matemática, os futuros professores devem desenvolver uma melhor compreensão dos processos pelos quais se aprende a ensiná-la e se desenvolve a identidade profissional do professor. Esta formação deve promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos, a especificidade de ensinar (PONTE e CHAPMAN, 2008). Além disso, na formação inicial em Álgebra, é importante proporcionar aos futuros professores várias experiências de aprendizagem que podem beneficiar de: observação, análise, e reflexão de situações de ensino-aprendizagem. Deste modo deve promover-se o conhecimento para ensinar este tema (BRANCO e PONTE, 2012).

As teorias utilizadas, para a análise do raciocínio algébrico, neste trabalho serão baseadas: nos níveis de Raciocínio Algébrico (RA) para o Ensino Básico e Secundário (GODINO, FERNANDEZ, LACASTA, NETO, WILHELMI, CONTRERAS, ÁKE, DIAS, OLIVEIRAS e LASA, 2015); no modelo de Conhecimento Didático - Matemático (CDM) (GODINO, 2009).

Este trabalho apresenta os seguintes pontos: uma descrição sobre o marco teórico e metodológico; uma descrição sobre as categorias de CDM, tidas em conta para a seleção das tarefas; uma análise à *priori* das 8 tarefas selecionadas, envolvendo as respostas esperadas, os objetivos e processos de resoluções; exemplos de respostas dos futuros professores; e uma síntese do trabalho onde se apresentam as considerações finais.

FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

O presente trabalho envolve uma fundamentação teórica do conceito de RA relacionado com modelo de CDM.

RACIOCÍNIO ALGÉBRICO (RA)

Vários autores têm refletido sobre as características da Álgebra escolar e a importância de promover o desenvolvimento do RA nos alunos desde o início da escolaridade (AKÉ, 2013; BLANTON e KAPUT, 2005; BRANCO e PONTE, 2012; CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007). Outros estudos trabalharam especificamente na caracterização do RA dos alunos no nível elementar e no nível secundário (EUGENIO, ROJANO, e PUIG, 2007; GODINO, AKÉ, GONZATO e WILHELMI, 2014).

Os investigadores Godino *et al.* (2014) propõem um modelo para caracterizar o raciocínio algébrico elementar (RAE) para o Ensino Básico onde se distingue quatro níveis de RA, tendo em conta os objetos e processos que intervêm na atividade Matemática. Os autores desenvolvem estes níveis em mais três níveis de RA para caracterizar os níveis de RA no Ensino Secundário. Relativamente à definição de níveis de RA esta baseia-se em distinções de natureza ontossemiótica:

- Presença de objetos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado);
- Transformações (operações) aplicadas a esses objetos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades estruturais;
- Tipo de linguagem utilizada.

Resumidamente, no quadro 1, apresenta-se a proposta de Godino *et al*. (2015) sobre os níveis de RA:

Quadro 1 - Níveis do RA para o Ensino Básico e o Ensino Secundário

	Nível	Objetos	Transformações	Linguagem
Raciocínio Algébrico Elementar (RAE) para Ensino Básico	0	- Não envolve objetos intensivos. - Nas tarefas estruturais podem envolver-se dados desconhecidos.	Opera-se com objetos extensivos	Natural, numérica, icónica, gestual; podendo envolver símbolos que se referem aos objetos extensivos, os dados desconhecidos
	1	- Nas tarefas estruturais pode envolver -se dados desconhecidos. - Nas tarefas funcionais reconhecem-se os intensivos.	- Nas tarefas estruturais aplicam-se relações e propriedades das operações. - Nas tarefas funcionais opera-se com objetos intensivos	Natural, numérica, icónica gestual; podendo envolver símbolos que referem aos objetos intensivos conhecidos
	2	Envolve objetos indeterminados ou variáveis	- Nas tarefas estruturadas as equações são da forma $Ax \pm B = C$ - Nas tarefas funcionais a generalidade é reconhecida mas não se opera com variáveis para obter a forma canónica de expressões algébricas.	Simbólica - literal, usada para referir os intensivos reconhecidos, ligados às informações do contexto espacial e temporal usadas para se referir a intensivos reconhecidos, embora ligada à informação espacial, temporal e contextual.
	3	Envolve indeterminadas variáveis Envolve objetos indeterminados ou variáveis	- Nas tarefas estruturadas, as equações são da forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ - Opera-se com objetos indeterminados ou variáveis.	Simbólica - literal, os símbolos são usados analiticamente, sem referências às informações do contexto.
Raciocínio Algébrico (RA) para Ensino Secundário	4	Variáveis, incógnitas e parâmetros; Famílias de equações e funções (Objetos intensivos com um maior grau de generalidade)	Ocorrem operações com variáveis, mas não com parâmetros.	Simbólica - literal; os símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
	5	- Variáveis, incógnitas e parâmetros; - Famílias de equações e funções (Objetos intensivos com um maior grau de generalidade)	Existem operações com os parâmetros e, portanto, com objetos com um maior grau de generalidade	Simbólica - literal; símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
	6	Estruturas algébricas; envolve objetos abstractos (espaços vetoriais, grupos, anéis, ...) Relações binárias Gerais e as suas propriedades (Objetos intensivo com quarto grau de generalidade)	Existem operações com objetos abstratos que formam partes das estruturas algébricas.	Simbólico - literal; os símbolos são usados analiticamente sem se referirem a informações contextuais.

Considera-se que os níveis de RA das atividades Matemáticas que podem ajudar a tomar consciência sobre os processos de generalização, simbolização, bem como a modelação estrutural, funcional e cálculo analítico, permitem a criação de ligações significativas entre pensamento algébrico no Ensino Básico e Secundário. A análise didática, centrada no reconhecimento de objetos e processos do pensamento algébrico, pode ajudar a identificar características de práticas de Matemática que podem intervir para aumentar gradualmente o nível de RA da atividade Matemática dos alunos.

CONHECIMENTO DIDÁTICO - MATEMÁTICO (CDM)

Godino (2009) propõe um sistema de categorização para analisar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores que integra, organiza e executa outros modelos, em particular o modelo MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*) de Hill, Ball, e Schilling (2008). O modelo CDM baseia-se no quadro teórico “Enfoque ontossemiotico” (EOS) para a Educação Matemática, conhecimento matemático e instrução (GODINO, BATANERO e FONT, 2007).

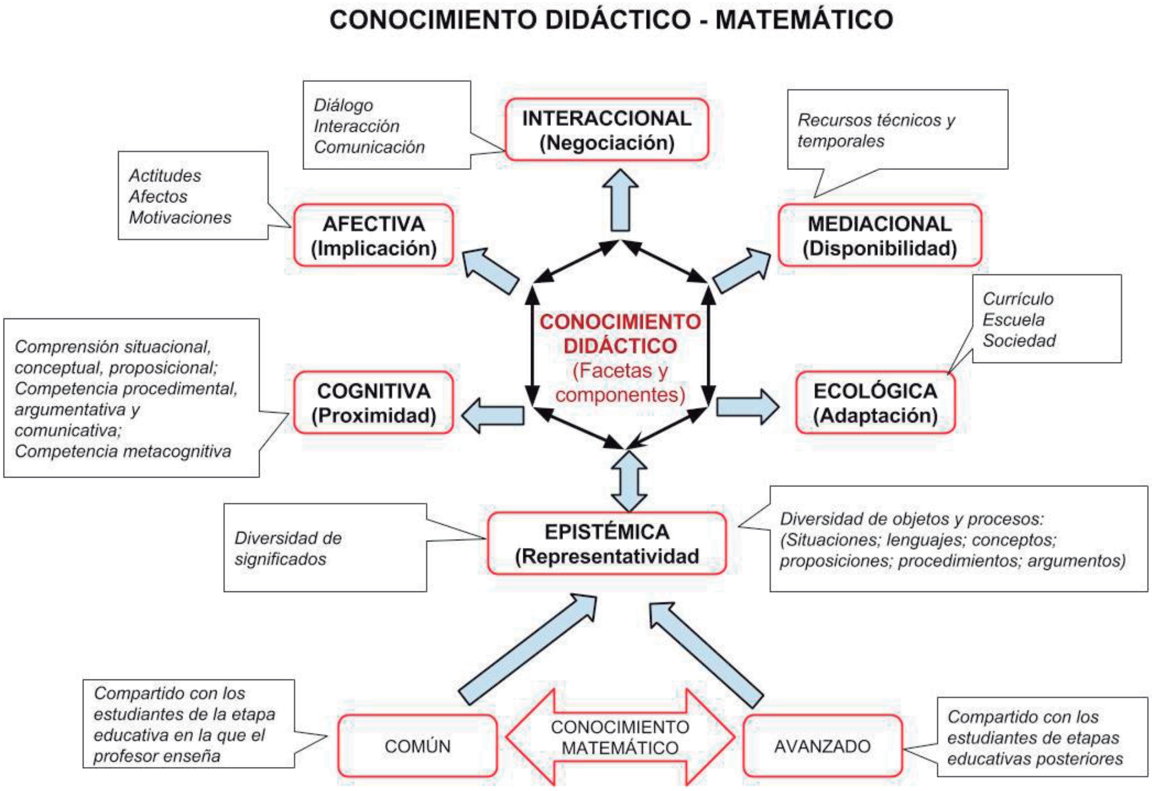
O EOS apresenta a noção de adequação didática (GODINO *et al*., 2007; GODINO, 2013). A adequação didática envolve componentes e critérios que podem ser utilizados para categorizar os conhecimentos matemáticos dos professores. A adequação didática engloba várias facetas de análise, aliadas as diferentes níveis de análise, de acordo com o tipo de informação necessária para tomar decisões fundamentadas sobre a instrução (GODINO, 2009). Referindo-se Godino (2009), estas facetas são:

1. Epistémica: envolve conhecimentos matemáticos relativos ao contexto institucional em que se realiza o processo de estudo e a distribuição no tempo das diversas componentes do conteúdo (problemas, linguagens, procedimentos, definições, propriedades, argumentos);
2. Cognitiva: diz respeito aos conhecimentos pessoais dos alunos e progressão das aprendizagens;
3. Afetiva: relativa a aspetos afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores) de cada aluno em relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido;
4. Mediacional: refere-se a recursos tecnológicos e à atribuição do tempo às diferentes ações e processos;
5. Interacional: identifica padrões de interação entre o professor e os alunos e a sua sequenciação orientada para a fixação e negociação dos significados;
6. Ecológica: refere-se o sistema de relações com o ambiente social, político, económico, … que suporta e condiciona o processo de estudo.

Neste modelo, são consideradas como dimensões-chave, de análise do processo de ensino e aprendizagem, as dimensões epistémica e cognitiva, prevendo para elas um ponto de vista antropológico e semiótico: a Matemática é entendida como uma atividade humana que adquire um significado mediante a ação das pessoas perante situações-problema específicas, as quais dão relevância às outras facetas, uma vez que também condicionam a aprendizagem (GODINO, 2009).

Relativamente ao modelo de CDM, este modelo integra-se na análise da atividade dos professores: análise didática segundo as dimensões cognitiva-afectiva, epistémica-ecológica e instrucional (envolve as dimensões interacional-mediacional) e do conhecimento matemático (Figura 1). Godino (2013) sublinha que este modelo tem em conta os seguintes aspetos relativos:

- Aos alunos: a sua implicação na aprendizagem e da proximidade, no sentido de Vygotsky, do objetivo de aprendizagem.
- Aos professores: as estratégias de negociação dos significados e a gestão dos recursos temporários e instrumentais.
- À Matemática: a representatividade dos conteúdos pretendidos e sua adaptação ao significado institucional de referência fixado pelo currículo e ao projeto educativo da instituição.



Fonte - Godino *et al*. 2015, p. 4

Para Godino (2009, p. 25-27), a aplicação do modelo de CDM permite ajudar a formular um questionário, que tem como objetivo caracterizar de maneira sistémica os conhecimentos de professores de Matemática nas suas diferentes facetas e componentes. Este questionário também pode ser utilizado para o desenho de intervenções formativas que promovam o desenvolvimento de conhecimento didático-matemático.

Referente ao modelo da adequação didática de Godino (2009), Contreras, Ordoñez e Wilhelmi (2010) focam as categorias da adequação didática em três grandes dimensões articuladas: faceta epistémica, faceta cognitiva e faceta instrucional. Para estes autores, estas dimensões podem constituir-se como um guião para o desenho, a implementação e a avaliação do plano de formação dos professores e para a reflexão e investigação dos futuros professores sobre a sua própria prática (investigação ação-reflexão).

METODOLOGIA

O presente trabalho tem como objetivo analisar respostas ao questionário sobre o raciocínio algébrico de futuros professores de Matemática. Pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

1. Quais são os conteúdos didático-matemáticos envolvidos nas tarefas?
2. Quais são os níveis de raciocínio algébrico que se identificam na resolução das tarefas?

Assume-se uma metodologia qualitativa de natureza exploratória-descritiva, que envolve a obtenção de dados descritivos, recolhidos no contacto direto do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e onde são influenciados pelo contexto (BOGDAN e BIKLEN, 2013).

Este estudo foca-se na análise das respostas dos 24 estudantes do curso de Licenciatura em Ensino da Matemática, da Universidade de Timor-Leste, a oito tarefas Matemáticas da natureza algébrica. A análise dos dados procura evidenciar aspectos relativos a duas vertentes fundamentais da formação inicial: o conhecimento da Álgebra, com enfoque do raciocínio algébrico; e o conhecimento didático-matemático. Foi realizada a análise do conteúdo para descrever e interpretar os dados, com vista a obter uma caracterização da situação em estudo e uma melhor compreensão da mesma, para atingir os objetivos definidos. Utilizou-se, para isso, essa análise usando as categorias de análise do raciocínio algébrico que a seguir se apresentam.

CATEGORIAS DO CONHECIMENTO DIDÁTICO-MATEMÁTICO SOBRE O RACIOCÍNIO ALGÉBRICO

Na análise dos dados, adapta-se a classificação do conteúdo algébrico e do conteúdo didático de Godino *et al.* (2015). Consideram-se as três categorias seguintes para analisar o conteúdo algébrico:

- ***Estruturas*** (relação da equivalência, propriedades das operações, equações, ...);
-***Funções*** (padrões aritméticos, padrões geométricos, função linear, afim, quadrática,...);
- ***Modelação*** (problemas de contexto que se resolvido através de equações ou da relações funcionais).

Para avaliar o conteúdo didático, neste trabalho, considera-se a seguinte categorização:

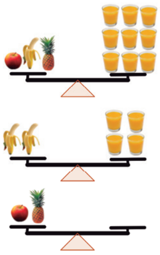
- ***Faceta epistémica***, relacionada com a identificação de objetos e processos algébricos (representações, conceitos, procedimentos, propriedades, generalização, modelação), a identificação de níveis de RA.
- ***Faceta cognitiva***, tendo em conta os significados pessoais dos alunos (conhecimento, compreensão e competência sobre os conteúdos algébricos elementais) e conflitos de aprendizagem sobre os objetos e processos algébricos.
- ***Faceta instrucional***, tem relação com os recursos para o ensino de Álgebra (situações - problema, meios técnicos) e a sua adequação ao currículo escolar.

ANÁLISE DAS TAREFAS

Nesta secção apresenta-se uma descrição e análise das tarefas que se baseia em: soluções esperadas; objetos e processos que se utilizam nas soluções; nível de RA; e categorias do CDM.
TAREFAS SOBRE ESTRUTURAS

Tarefa 1

Observa a figura a baixo:
a) Quantos copos de sumo tem que se colocar na terceira balança, para ficar equilibrada?
b) Qual interpretação do "equilíbrio" está associada ao conhecimento matemático?



Solução esperada. Na solução do item a é feita a tradução em linguagem algébrica envolvendo os símbolos como incógnitas. Se a maçã, a banana e o ananás são simbolizados por x, y e z, então a cada uma das balanças é associada uma equação. Portanto, na 1ª balança: $x + y + z = 9$; na 2ª balança: $2y = 4 \rightarrow y = 2$; e na 3ª balança: $x + 2 + z = 9$. Assim, $x + z = 9 - 2 = 7$

O item a desta tarefa possibilita uma solução de forma mais informal que envolve o mesmo nível de RA da solução anterior, envolve a operação numérica, mas não envolve nenhum símbolo algébrico como incógnita. Na segunda balança, indica-se que 2 bananas podem corresponder a 4 copos, ou seja 1 banana corresponde a 2 copos. Na primeira balança tem-se 9 copos no prato esquerdo. Se tirarmos 1 banana no prato esquerdo, então tiramos também 2 copos no prato direito, para a balança se manter em equilíbrio. Logo, na terceira balança teremos 9 - 2 = 7 copos de sumo.

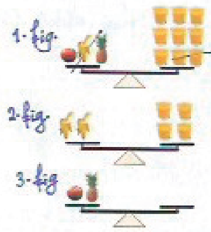
No item b, questiona-se, implicitamente, sobre o objeto e o processo que se utiliza para resolver esta tarefa. Neste caso é uma igualdade como equivalência de expressões.

Nível de RA. O objetivo desta tarefa é encontrar as soluções que manifestam o nível 1 de RA. Possibilita, também, encontrar as soluções de nível mais avançado, envolvendo símbolos algébricos e soluções algébricas. Neste último caso, categoriza-se no nível 3 de RA.

Categorias de CD. A tarefa 1 permite avaliar a categoria de CD na faceta epistémica, conteúdo algébrico sobre estruturas.

Exemplos de resoluções corretas:

<table>
<tr><td colspan="2">Análise dos níveis de RA</td></tr>
<tr><td>Resposta A

a. Baseia-se a explicação que fiz ao lado da segunda figura então quando tirei uma banana na primeira figura significa tirei também dois copos no lado direito, então ~~fio~~ a balança ficou com uma maça e um ananas no lado esquerda da balança e no lado direito ficou com sete copos de sumo.
Para responder esta pergunta (a). A resposta ~~seria~~ é sete copos de sumo.


Duas bananas = quatro copos de sumo
⇒ significa uma banana = dois copos de sumo.</td><td><u>Nível 0</u>
Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas.
Utiliza-se uma linguagem natural e numérica.
Aplicam-se relações de equilíbrio.
A configuração da resposta traduz o conceito da igualdade como equivalência.</td></tr>
<tr><td>Resposta B

Precisamos de colocar 7 copos para fazer balanço.
Maça + Banana + Ananás = 9 copos.
2 Bananas = 4 copos ; então 1 Banana = 2 copos
Maça + Banana + Ananás = 9 copos.
Maça + 2 copos + Ananás = 9 copos.
Maça + Ananás = 9 - 2 copos = 7 copos</td><td><u>Nível 1</u>
- Envolve símbolo da operação numérica.
- Aplicam-se as relações de equilíbrio.
- Utiliza-se uma linguagem natural e numérica.
- A configuração da resposta é de álgebra operacional.</td></tr>
<tr><td>Resposta C

a) Na terceira balança para ficar o equilibro [illegible] copos de sumo podemos colocar para uma equação que representa na:
$\left.\begin{array}{l} a+b+e=9 \\ 2b=4 \\ a+e=x \end{array}\right\}$ onde a = maçã, b = banana, e = ananas.
⇔ 2b = 4.
b = 2
⇔ a + 2 + e = 9
⇔ a + e = 7
Logo na terceira balança possou o valor 7, ou seja 7 copos de sumo.</td><td><u>Nível 3</u>
- Utilizam-se símbolos como incógnitas (simbólica literal).
- Utilizam-se operações algébricas.
A configuração da resposta é de álgebra estrutural.</td></tr>
</table>

Tarefa 7

Sendo a forma geral de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas dada por

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, com a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 são reais.

a) Indique a expressão geral x e y da solução do sistema, ou seja os valores de x e de y.
b) Identifique os conhecimentos algébricos que se pode utilizar para resolver esta tarefa.
c) Enuncie duas problemas que se possam propor aos alunos do 10º ano cuja sistema das equações lineares com duas incógnitas!

Solução esperada. O item a promove algumas possibilidades de resoluções, tais como: método da eliminação ou de substituição ou misto, a regra de Cramer e o método de matriz inversa. Com esta tarefa não se pretende uma solução através de exemplos particulares do sistema das equações lineares, mas procura-se uma generalização através dos exemplos escolhidos.

Solução 1: Pelo método da eliminação	Solução 2: Pela regra de Cramer	Solução 3: Pelo método de matriz inversa
$\begin{array}{l} a_1\ x + b_1\ y = c_1\ (múltiplica\ com\ b_2) \\ a_2\ x + b_2\ y = c_2\ (múltiplica\ com\ b_1) \end{array}$ $\begin{array}{c} a_1\ b_2 x + b_1 b_2\ y = b_2 c_1 \\ a_2\ b_1 x + b_1 b_2\ y = b_1 c_2 \\ \hline (a_1\ b_2 - a_2\ b_1)\ x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \end{array} -$ $x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$ Com a mesma analogia encontramos $\begin{array}{l} a_1\ x + b_1\ y = c_1\ (múltiplica\ com\ a_2) \\ a_2\ x + b_2\ y = c_2\ (múltiplica\ com\ a_1) \end{array}$ $\begin{array}{c} a_1\ a_2 x + a_2 b_1\ y = a_2 c_1 \\ a_1\ a_2 x + a_1 b_2\ y = a_1 c_2 \\ \hline (a_2 b_1 - a_1 b_2)\ y = a_2 c_1 - a_1 c_2 \end{array} -$ $y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{-(a_1 c_2 - a_2 c_1)}{-(a_1 b_2 - a_2 b_1)} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$	$x_j = \frac{\Vert A_j \Vert}{\Vert A \Vert} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ Assim, $x = \frac{\begin{Vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$ $y = \frac{\begin{Vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$	$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}\ \underset{P}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$ $P = A^{-1}.B$ $P = \frac{1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ $P = \frac{1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2 c_1 - b_1 c_2 \\ -a_2\ c_1 + a_1\ c_2 \end{bmatrix}$ $P = \frac{1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2 c_1 - b_1 c_2 \\ a_1\ c_2 - a_2\ c_1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \\ \frac{a_1\ c_2 - a_2\ c_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \end{bmatrix}$ Assim, $x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$ e $y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

Espera-se que seja utilizado um dos procedimentos referidos: da eliminação; o procedimento da substituição; o procedimento misto (eliminação e substituição); as propriedades da operação numérica (adição, substração, multiplicação, divisão); a regra de Cramer; os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa (item b) são, o conceito de matriz (determinante, inversa e matriz adjunta); conceito de equação de matriz.

O item c, permite envolver a criatividade, pois faz a construção de vários problemas sobre o tema “sistema das equações lineares com duas incógnitas”. Por exemplo: No estacionamento há 21 veículos que são compostos por carros e motos. O número total das rodas são 60. Quantos são os carros que estão no estacionamento?; Dada uma reta definida pela equação $y = ax + b$, se os pontos de A (3,8) e B (-2, -7) estão nesta reta, determine a equação desta reta

Nível de RA. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 5 de RA, que se indica pela resolução do problema, de forma geral, através da utilização de vários métodos de resolução.

Categorias de CD. No item a tem-se a faceta cognitiva: o conteúdo de Álgebra, envolve o conceito de matriz, em modo geral, e a propriedade da resolução de um sistema das equações lineares; a faceta epistémica sobre a generalização do resultado de análise utilizando vários métodos de resolução. No item b, pretende-se uma reflexão, do tipo epistémico, sobre os métodos e os objetivos matemáticos envolvidos nesta tarefa. E o item c, pretende uma reflexão do tipo epistémico sobre o conhecimento dos tipos dos objetos e dos processos que implicam no conhecimento instrucional sobre a tarefa.

<u>Sobre as resoluções obtidas.</u> No <u>item a</u>, não se encontrou nenhuma resolução em forma geral. Os estudantes, futuros professores, utilizaram um exemplo particular e resolveram pelo método da eliminação, da substituição ou misto.

<u>Exemplos de resoluções:</u>

<table>
<tr><th colspan="2">Análise dos níveis de RA</th></tr>
<tr><td>Resposta A - resolução com o método do misto

(a). $2x + 3y = 10$
$3x + 4y = 14$
Solução: $2x + 3y = 10$ $\times 3$ } elimina x
$3x + 4y = 14$ $\times 2$
$6x + 9y = 30$
$6x + 8y = 28$ −
$y = 2$
$2x + 3y = 10$ $\times 4$ } elimina y
$3x + 4y = 14$ $\times 3$
$8x + 12y = 40$
$9x + 12y = 42$
$x + 0 = 2$
$x = 2$</td><td rowspan="2"><u>Nível 3</u>

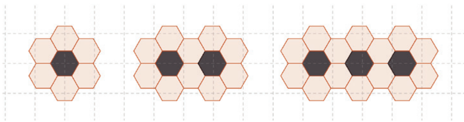
- Utiliza-se símbolos como incógnitas (simbólica literal).
- Utiliza-se operações algébricas, aplicando as propriedades da eliminação (resposta A) ou do misto (resposta B).
A configuração da resposta é de álgebra estrutural.</td></tr>
<tr><td>Resposta B - resolução com o método da eliminação

$4x + 2y = 4$ | 1
$x + y = 5$ | 2
Solução: $4x + 2y = 4$
$2x + 2y = 10$
$2x = -6$
$x = \frac{-6}{2}$
$x = -3$
* $4x + 2y = 4$
$= 4(-3) + 2y = 4$
$= -12 + 2y = 4$
$= 2y = 4 + 12$
$= 2y = 16$
$y = \frac{16}{2}$
$y = 8$
Justifique: * $4x + 2y = 4$
$= 4(-3) + 2(8) = 4$
$= -12 + 16 = 4$
Então: o valor $x = -3$ e $y = 8$</td></tr>
</table>

TAREFAS SOBRE FUNÇÕES

<u>Tarefa 2</u>

A figura abaixo mostra o padrão de uma *lafatik*[1] que é composto por *tali tahan* branco e *tali tahan* preto. A primeira flor é formada por 6 *tali tahan* branco e 1 *tali tahan* preto, a segunda por 10 *tali tahan* branco e 2 *tali tahan* preto, e assim sucessivamente.



a) Quantos são os tali *tahan* brancos e *tali tahan* pretos necessários para formar 4 flores?
b) Quantas flores se poderiam construir com 37 *tali tahan*?
c) Como se modificaria o enunciado da tarefa para introduzir algum procedimento de resolução que ponha em jogo conhecimentos algébricos?
d) Quais seriam tais conhecimentos algébricos?

<u>Solução esperada</u>. Nesta tarefa envolve-se a dedução de uma fórmula (expressão designatória de uma função). Trata-se de uma atividade de generalização, em que n é uma variável que representa a posição na sequência identificada a partir do padrão (o domínio da função é constituído por números naturais).

Com base na observação das três primeiras flores, preenche-se os seguintes dados:

Flor	*tali tahan* branco	*tali tahan* preto	Conjunto de *tali tahan*
1ª	$6 = 6+4 \,.\, 0$	1	7
2ª	$10 = 6+4 \,.\, 1$	2	12
3ª	$14 = 6+4 \,.\, 2$	3	17
...	...	...	...
nª	$U_n = 6 + 4 \,.\, (n - 1)$ $U_n = 4n + 2$	$U_n = n$	$U_n = (4n + 2) + n$ $U_n = 5n + 2$

a. $U_4 = ?$

Tali tahan branco → $U_n = 4n + 2$

$$U_4 = 4 \,.\, 4 + 2 = 18$$

Tali tahan preto → $U_n = n$

$U_4 = 4$. Assim, a 4ª flor é constituída por 18 *tali tahan* brancos e 4 *tali tahan* pretos.

b. $U_n = 37 \rightarrow n = ?$

$U_n = 5n + 2$

$37 = 5n + 2$

$35 = 5n \rightarrow n = 7$

A flor que têm 37 *tali tahan* é 7ª flor.

[1] "Lafatik", é uma bandeja hexagonal que é formada por folhas de pal*ma de "Borassus flabellifer" (em latim), é conhecido por tali tahan. O "Lafatik" é muito utilizado na vida diária e, também, nas cerimônias culturais em Timor - Leste. Além da sua forma hexagonal, o "Lafatik" também é formado por um conjunto de tali tahan que se forma, também, em hexágono.*

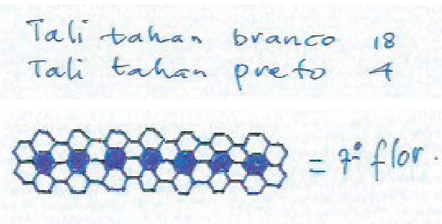
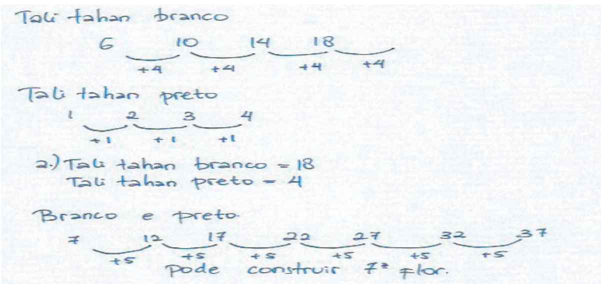
No item c, possibilita-se a modificação e a criação de questões do tipo daquelas que foram resolvidas no problema. Por exemplo: Quantos são os *tali tahan* brancos e os *tali tahan* pretos necessários para formar a quinta flor (5ª flor)? Quantas flores se poderia construir com 30 *tali tahan* brancos?

A utilização da fórmula algébrica possibilita a análise de conhecimentos algébricos utilizados nesta tarefa, que são: sequência e regularidade; representação algébrica de uma padrão; progressão aritmética (item d).

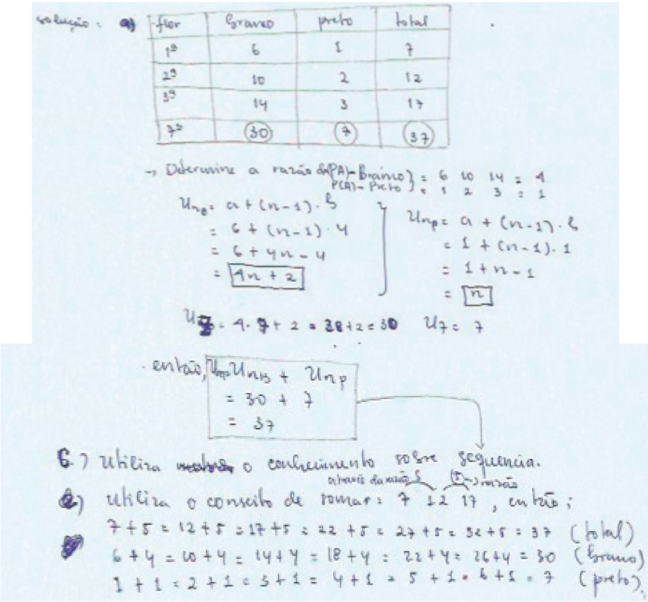
Nível de RA: nesta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 2 de RA indicado pela alfanumérica da equação e no processo de simplificação da expressão algébrica. Possibilita-se, também, encontrar as soluções por tentativa-erro. Para este caso, categoriza-se no nível 1 de RA.

<u>*Categorias de CD*</u>. Os <u>itens a</u> e <u>b</u>, desta tarefa, avaliam a faceta cognitiva; conteúdo algébrico de tipo funcional. O <u>item c</u> também envolve o conhecimento didático da faceta instrucional do conhecimento, através da modificação do enunciado da tarefa, tendo em jogo sobre conhecimentos algébricos. O <u>item d</u> pressupõe uma reflexão epistémica sobre o tipo de conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa.

<u>Exemplos de resoluções corretas:</u>

Análise dos níveis de RA	
Resposta A 	<u>Nível 0</u> - Não envolve nenhuma letra ou símbolo. - Indica o valor numérico; - Não realiza nenhuma operação algébrica. - Utiliza a representação de um diagrama. ***A configuração da tarefa é raciocínio visual***
Resposta B 	<u>Nível 1</u> - Utiliza linguagem numérica envolvendo as operações de adição e substração. - Identifica a relação entre dois números sucessivos. ***A configuração da tarefa é álgebra operacional***

Resposta C



solução: a)

flor	branco	preto	total
1º	6	1	7
2º	10	2	12
3º	14	3	17
7º	30	7	37

→ Determine a razão da P(A) - Branco } = 6 10 14 = 4
P(A) - Preto } = 1 2 3 = 1

$U_{nB} = a + (n-1) \cdot r$
$= 6 + (n-1) \cdot 4$
$= 6 + 4n - 4$
$= \boxed{4n + 2}$

$U_{nP} = a + (n-1) \cdot r$
$= 1 + (n-1) \cdot 1$
$= 1 + n - 1$
$= \boxed{n}$

$U_7 = 4 \cdot 7 + 2 = 28 + 2 = 30$ $U_7 = 7$

· então, $U_{nB} + U_{nP}$
$= 30 + 7$
$= 37$

b) utiliza o conhecimento sobre sequencia.

através da razão 5 → razão

c) utiliza o conceito de somar: 7 12 17, então;

7 + 5 = 12 + 5 = 17 + 5 = 22 + 5 = 27 + 5 = 32 + 5 = 37 (total)
6 + 4 = 10 + 4 = 14 + 4 = 18 + 4 = 22 + 4 = 26 + 4 = 30 (branco)
1 + 1 = 2 + 1 = 3 + 1 = 4 + 1 = 5 + 1 = 6 + 1 = 7 (preto).

Nível 3

- Utiliza letras, para representar os números.
- Justifica de modo geral, explica o funcionamento e a estrutura de cada solução.
- Identifica um padrão, uma progressão aritmética.
- Opera algebricamente e chega até uma expressão canónica.

A configuração da tarefa é álgebra funcional

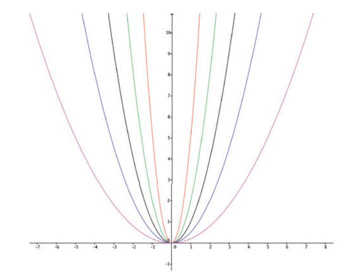
Tarefa 5

Considera uma função real de variável real, definida, de forma geral, por .
a) Observe os gráficos desta função para: *a* >0 ; *a* <0; 0 <*a* <1; e *a* >1
b) Explique os efeitos do parâmetro *a* nos gráficos da função anterior.
c) Identifique os conhecimentos algébricos que se envolvem na resolução desta tarefa.

Solução esperada

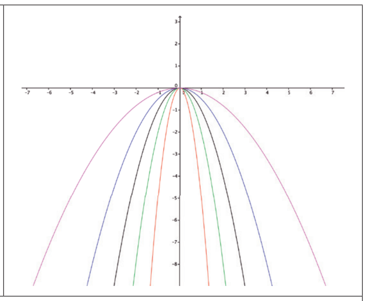
Se a > 0, por exemplo,

$$y = x^2$$
$$y = 2x^2$$
$$y = 5x^2$$
$$y = \frac{1}{2}x^2$$
$$y = \frac{1}{5}x^2$$



Se a < 0, por exemplo,

$$y = -x^2$$
$$y = -2x^2$$
$$y = -5x^2$$
$$y = -\frac{1}{2}x^2$$
$$y = -\frac{1}{5}x^2$$



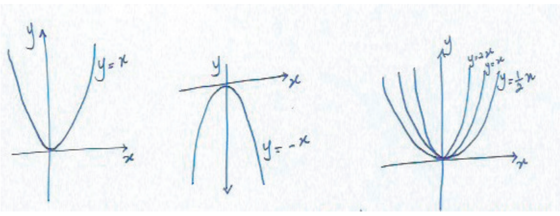
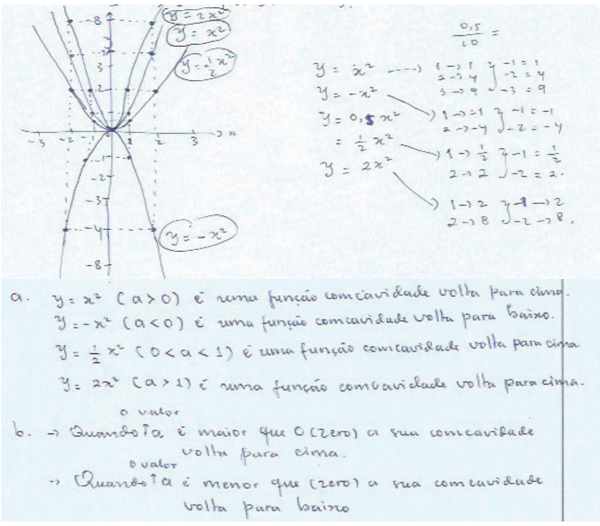
Item b.
- O sinal do coeficiente ***a*** influência o sentido da concavidade.
- O valor absoluto de ***a*** influência a abertura da parábola. Quanto maior é o valor absoluto de ***a***, menor a abertura da parábola.
- Qualquer uma destas parábolas tem vértice no ponto (0,0) e o eixo de simetria é a reta de equação x = 0, de onde se conclui que são independentes de ***a***.

No item c, o tipo de conhecimentos algébricos que são envolvidos na tarefa são: o conceito da função quadrática; a representação gráfica de uma função quadrática; a modelação da função quadrática pela atribuição de vários valores do parâmetro *a*; a generalização da família da função quadrática, tendo por base o gráfico relativo ao parâmetro *a*.

Nível de RA. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 4 de RA, relacionados com a utilização dos: parâmetros; coeficientes de função; variáveis. Espera-se, também, encontrar respostas que envolvam uma generalidade intensiva (nível 5), por exemplo, relacionando o vértice e o eixo de simetria da parábola, representação gráfica da função quadrática.

Categorias de CD. Com o item a desta tarefa, pretende-se avaliar a faceta cognitiva; o conteúdo algébrico, do tipo funcional, relacionar com as observações gráficas; o conteúdo epistémico sobre representações gráficas e as propriedades relativas ao parâmetro . No item b, pretende-se ainda uma reflexão, do tipo epistémico, sobre os métodos e os objetivos matemáticos envolvidos nesta tarefa.

Exemplos das resoluções corretas obtidas:

Análise dos níveis de RA	
Resposta A  	Nível 4 Envolve o parâmetro . Estudo da família da função quadrática. Não opera com o parâmetro. Não envolve uma generalização. *A configuração da resposta é o raciocínio diagramático.*
Resposta B  	Nível 5 Envolve o parâmetro . Estudo da família da função quadrática. Opera com o parâmetro; Envolve uma generalização. *A configuração da resposta é o raciocínio algébrico e diagramático.*

TAREFAS SOBRE MODELAÇÃO

Tarefa 3

Um aluno recebe dos seus pais um conjunto de dinheiro para comer durante 40 dias. Por isso, encontrou sítios onde pode comer a \$ 4.00 na hora do almoço. Desta forma o pressuposto inicial lhe dura 60 dias. a. Quanto dinheiro que recebe? b. Pode se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira? c. Pode se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?

<u>Solução esperada</u>. O <u>item a</u> desta tarefa pretende avaliar o conhecimento sobre conteúdo matemático de natureza algébrica. Espera-se a resolução do problema de equação linear, utilizando o raciocínio algébrico na sua resolução e envolvendo o conceito de equação linear.

Sabendo que: P = o total de dinheiro que recebe

x = o gasto para comer durante 40 dias

Então $x = \frac{P}{40} \rightarrow P = 40x$

Se y é o gasto diário que permite para comer durante 60 dias,

Então $y = \frac{P}{40} \rightarrow P = 60\ y$

Portanto $40x = 60y$, além de $y = x - 4$

$40x = 60\ (x - 4)$
$40x = 60\ x - 240$
$20x = 240 \rightarrow x = 12$

Assim, o dinheiro que recebe: P = $40x = 40 \cdot 12 =$ \$ 480.00

Este exemplo também pode ser uma razão para responder o <u>item c</u> pois possibilita, também, utilizar apenas com o procedimento aritmético (<u>item b</u>) e o cálculo numérico para resolver o problema, por exemplo:

O gasto de \$ 4.00 por dia durante 40 dias previstos. Então, o total de poupança é \$ 4.00 x 40 dias = \$ 160.00.

Com esta quantidade poderia comer durante 20 dias.

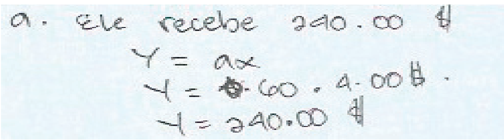
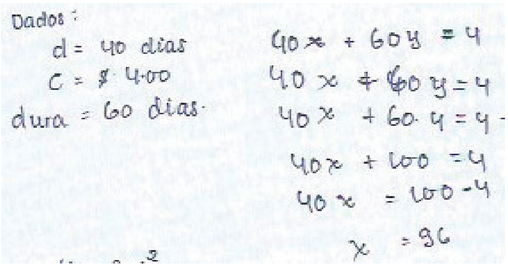
O custo real diária é $\frac{\$\ 160.00}{20\ dias}$ = \$ 8.00/dia

Como os dias pressupostos inicialmente foram 60, então o total de dinheiro que recebe dos pais é 60 dias x \$ 8.00 = \$ 480.00

<u>Nível de RA</u>. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 3 de RA e que se indicam pelo envolvimento de um sistema de equações com duas incógnitas. Possibilita encontrar as dificuldades de raciocinar algebricamente e utilizar apenas o raciocínio aritmético com cálculo numérico. Para este caso, categoriza-se no nível 1 de RA.

<u>Categorias de CD</u>. Nesta tarefa envolve-se a faceta cognitiva do tipo modelacional sobre o sistema das equações com duas incógnitas (o <u>item a</u>), que implica uma reflexão epistémica sobre os métodos e objetos matemáticos envolvidos na resolução desta tarefa (o <u>item b</u> e o <u>item c</u>).

Exemplos de resoluções erradas:

Análise das respostas	
Resposta A  a. Ele recebe 240.00 $ Y = ax Y = 60 . 4.00$. Y = 240.00 $	Erro na compreensão e tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica.
Resposta B  Dados: d = 40 dias C = $ 4.00 dura = 60 dias. 40x + 60y = 4 40x + 60y = 4 40x + 60. 4 = 4. 40x + 100 = 4 40x = 100 - 4 x = 96	Erro na compreensão e na resolução de problema.

Tarefa 4

Analise as seguintes expressões: 1) $4x + 5 = 25$ 2) $y = 2x + 1$ 3) $P = 2c + 2l$ a. Descreva a interpretação que faz de cada uma das expressões acima. b. Enuncie três problemas que se possam propor aos alunos do secundário cuja solução que leva destas expressões.

Solução esperada. No item a desta tarefa apresentam-se três expressões algébricas e pretende-se que os futuros professores identifiquem o tipo de expressões. Relativamente à expressão "$4x + 5 = 25$" espera-se que reconheçam que se trata da expressão de uma equação linear com uma incógnita; da expressão "$y = 2x + 1$" espera-se que reconheçam a expressão como sendo uma função afim que permite encontrar o valor da variável y em função da variável *x*. Da expressão "$P = 2c + 2l$", espera-se que reconheçam a expressão de uma fórmula para calcular o valor da variável P em função da variável *c* e da variável *l*. Há uma possibilidade de que esta expressão também é uma fórmula para calcular o perímetro do triângulo com base *c* e altura *l*.

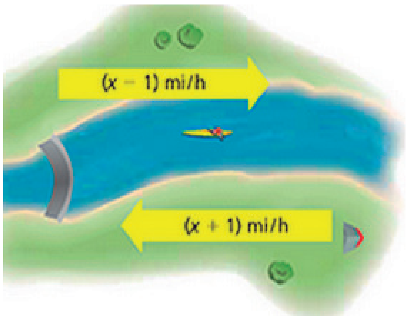
Nível de RA. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 2 de RA.

Categorias de CD. No item a desta tarefa, pretende-se avaliar a faceta cognitiva; conteúdo algébrico (Equação e Função); o item b envolve a faceta instrucional que pede aos futuros professores a construção de uma modelação das tarefas com o conteúdo algébrico das três expressões.

As resoluções obtidas. No registro a seguir apresenta-se os resultados dos 24 alunos em relação à identificação das três tarefas.

Expressão	Número de resposta		
	Correta	Errada	Não responde
$4x + 5 = 25$	21	2	1
$y = 2x + 1$	11	10	3
$P = 2c + 2l$	2	20	2

Tarefa 6



Suponho que moves de *kayak* 5 milhas a favor de movimento atual em um rio desde ao acampamento base para uma barragem, e que seguidamente regressas ao acampamento. A velocidade constante a que moves em toda a viagem é de x milhas por hora, e a velocidade de movimento atual de rio é de 1 milhas por hora.

a) Escreva uma expressão que permite calcular o tempo do total de viagem.
b) Enuncie uma variação desta tarefa cuja solução implica apenas os conhecimentos aritméticos. Resolva este problema.
c) Enuncie uma variação de problema cuja solução implica o uso de parâmetro. Escreva a expressão correspondente.

Solução esperada. O item a envolve os conhecimentos sobre: a distância entre um acampamento (ponte A) e uma barragem (ponte B); a velocidade de *kayak*; a velocidade de rio; e a fórmula do tempo (t) relativamente a distância (d) e a velocidade (v), que é $t = \frac{d}{v}$.

Se a velocidade do *kayak* do ponte A para o ponte B é (x - 1) milha/hora, então o tempo assumido pelo *kayak* de ponte A para o ponte B é dado por $t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{5}{(x-1)}$.

Se a velocidade do *kayak*, no sentido contrario, do ponte B para o ponte A é (x + 1) milha/hora, consequentemente o tempo assumido pelo *kayak* de ponte B para o ponte A é dado por $t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{5}{(x+1)}$.

Portanto a expressão do tempo total é

$$t = t_1 + t_2 = \frac{5}{(x-1)} + \frac{5}{(x+1)} = \frac{5\,(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{5\,(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{10\,x}{(x+1)(x-1)}.$$

Nível de RA. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 3 de RA, incidindo na tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica e pelo envolvimento da equação linear na sua resolução de problema.

Categorias de CD. O item a envolve a faceta cognitiva do tipo modelação sobre a resolução de problema de uma equação linear. Os itens b e c, envolvem a faceta epistémica, uma reflexão sobre os métodos e objetos matemáticos envolvidos na resolução desta tarefa.

As resolução obtidas. Não se encontrou nenhuma resposta certa para esta tarefa, que se revelou, uma tarefa muito complicada para os alunos. (Como os comentários dos alunos indicam, estes não têm conhecimento suficiente para esta tarefa ou não estão habituados a este tipo de tarefa, por não terem sido apresentadas pelo professor ou são aplicadas pouca vezes)

Exemplos de resoluções erradas obtidas:

Análise das respostas	
Resposta A a) dados: $V_{constante} = x$ mil/hora $V_{atual} = 1$ mil/hora $\Leftrightarrow (x-1)\ (x+1)$ $\Leftrightarrow x^2-1$	Erro na tradução da linguagem natural para linguagem algébrica. Erro na resolução de problema.
Resposta B Solução: a). $(x-1)+(x+1)=5$ $2x+0=5$ $2x=5$ $x=5/2$ $x=2{,}5$ mil/hora	Erros na compreensão. Erro na tradução da linguagem natural para linguagem algébrica. Erro na resolução de problema.
Resposta C a). $\Delta V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{\Delta V}$ $\Delta t = \frac{5 \text{ km}}{(x-1) \text{ km/h}}$	Conseguiu traduzir uma parte de problema com a formula de velocidade. Não conseguiu de resolver problema.

Tarefa 8

A taxa do imposto do salário dos funcionários públicos em Timor-Leste é de 12 % nos primeiros $ 200 e 16 % no restante, como se apresenta na seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} a + 0.12\,x\,; se\; 0 < x \leq 200 \\ b + 0.16\,(x - 200); se\; x > 200 \end{cases}$$

a. Para que a seja contínua, se o João recebe $ 554, qual é o salário dele antes de se retirar o imposto?
b. Quais são os conhecimentos algébricos que se utilizam para resolver esta tarefa?
c. Considera que esta tarefa é adequada para ser proposta a alunos do ensino secundário? Se concorda, indique em que ano e justifique a sua resposta.

Solução esperada. Resposta obtida pela continuidade de uma função. Se f(x) é continua num ponto, então o limite lateral à esquerda do ponto é igual ao limite lateral à direita do ponto.

Item a

Continuidade da função f(x) no ponto 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a + 0.12\,x = a$$

Assim, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

Então $a = 0$

- Continuidade da função *f (x)* no ponto 200

$$\lim_{x \to 200^-} f(x) = \lim_{x \to 200^-} a + 0.12x = a + 0.12\,(200) = \ a + 24$$

$$\lim_{x \to 200^+} f(x) = \lim_{x \to 200^+} b + 0.16\,(\,x - 200) = b + 0.16\,(200 - 200) = \ b$$

Assim, $\lim_{x \to 200^-} f(x) = \lim_{x \to 200^+} f(x)$

Então $a + 24 = b$, substitui-se o valor de $a = 0$ e conclui-se que o valor de $b = 24$.

Portanto, a fórmula da função *f* é *f (x)* $= \begin{cases} 0\,;\, se\; x \;\le 0 \\ 0.12\,x\,;\, se\; 0 < \; x \le 200 \\ 24 + 0.16\,(x - 200);\, se\; x \; > 200 \end{cases}$

O valor do salário do João é obtido pela lógica que o salário inicial é a soma do salário depois de substração de imposto e o imposto. Ou seja,

Salário = Salário recebido + Taxa

x = 554 + (24 + 0.16 (x - 200))
x = 554 + 24 + 0.16 x + 0.16 (-200)
x = 578 + 0.16 x - 32
x = 546 + 0.16 x
x - 0.16 x = 546
0.84 x = 546
x = 650

Assim, o salário do João antes de substração de taxa são $ 650.

Nível de RA. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 5 de RA que incida pela tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica e pelo envolvimento dos conceitos de limite e continuidade de uma função num ponto para obter o valor do parâmetro *a* e o valor do parâmetro *b*.

Categorias de CD. O item a envolve a faceta cognitiva: o conteúdo algébrico do tipo modelacional que implica uma reflexão epistémica sobre: os conceitos de função linear e função constante; os procedimentos para resolver este problema relaciona os conceito de limite e de continuidade. O item b pretende refletir sobre o conteúdo didático do tipo epistémico, sobre os métodos e os objetivos matemáticos envolvidos nesta tarefa. No item c pretende-se uma reflexão e uma justificação, baseadas nos conhecimentos dos alunos sobre: função; limite; continuidade e cruza-se com o plano currícular para o Ensino Secundário.

As resoluções obtidas. Não se encontrou nenhuma resposta certa para esta tarefa e foi uma tarefa muito complicada para os alunos.

Exemplos de resoluções erradas obtidas:

Análise dos níveis de RA	
Resposta A $554 \Rightarrow 200 \times 12\% = \frac{2400}{100} = 24$ $\Rightarrow 354 \times 16\% = \frac{5664}{100} = 56,64$ = João iha osan hamutuk = 80,64.	Erro na resolução de problema. Erro na interpretação.
Resposta B $a + 0,12x$ se $0 < x \leq 200$ $b + 0,16(x - 200)$: se $x > 200$. a. $554 + 0,12x = 0$. $0,12x = -554$ $a + 0,12 \cdot 554 = 0$. $a + 66,48 = 0$ $a = 66,48$ $b + 0,16x - 32x = 0$ $b + 0,16(554) - 32(554) = 0$ $b + 88.64 - 177.28) = 0$. b	Erro na resolução de problema.

ALGUMAS CARACTERÍSTICAS PSICOMÉTRICAS DE QUESTIONÁRIO

No quadro 2, apresentam-se as classificações de todos os itens do questionário baseadas nas categorias do CDM sobre o RA, para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário. De cada fila e coluna desta tabela apresenta-se a categorização do CDM, considerado como análise de validação do conteúdo deste instrumento.

Porém, neste trabalho, não foram avaliadas as respostas dos futuros professores em todas as categorias propostas no modelo CDM. Não foi avaliada a faceta afectiva, relacionada com atitudes, motivações, emoções. E nem foi avaliada a faceta ecológica, envolvendo aspetos do currículo ou materiais didáticos apoiados na aprendizagem de Álgebra. Não foi possível sintetizar neste artigo a avaliação de todas as categorias atendendo a limitação do espaço.

Quadro 2 - Conteúdos avaliados por cada item de questionário

CONTEÚDO DIDÁTICO	CONTEÚDO ALGÉBRICO					
	Estruturas		Funções		Modelação	
	Primária	Secundária	Primária	Secundária	Primária	Secundária
Epistémico (níveis de algebrização)				5c		3b; 3c
Cognitivo (Significados pessoais)	1a; 1b	7a; 7b	2a; 2b; 2d	5b		3a; 8b; 8c
Instrucional (situações e recursos)		7c	2c		6b	4b; 6c
Conteúdo algébrico (apenas conhecimento comum ou avançado)					4a	6a; 8a

As questões que estão envolvidas neste estudo composto por três categorias do conteúdo algébrico são as que seguem. Estruturas (5 itens); Funções (6 itens); e Modelação (11 itens) que estão distribuídos em 36 % (8 itens) para o ensino primário e 64 % (14 itens) para o ensino secundário.

Relativamente ao conteúdo didático, a maioria destas questões é da faceta cognitiva (11 itens) que serve para avaliar o conhecimento sobre os conteúdos algébricos. Neste caso são: igualdade, padrão, sequência e regularidade, função linear, família da função quadrática, sistema das equações lineares com duas incógnitas, limite da função num ponto e continuidade. Mostra-se, ainda, um maior número de faceta instrucional (5 itens) que estimulam aos futuros professores construir ou modificar as tarefas que podem promover a utilização do RA. Questiona-se, também, em 3 itens da faceta epistémica sobre: os procedimentos utilizados nas resoluções dos problemas; a identificação dos conhecimentos algébricos que se envolvem na resolução da tarefa.

Considera-se a importância de completar a classificação do conteúdo didático que foi construído por Contreras, Ordoñez e Wilhelmi (2010), Godino *et al*. (2015) adaptou mais uma faceta do “conteúdo algébrico que são apenas o conhecimento comum ou avançado”. Nesta faceta questiona-se: 1 item sobre o conhecimento comum da álgebra básica (na interpretação da expressão algébricas sobre equação linear com uma incógnita); 2 itens do conteúdo algébrico mais avançado, que são: da aplicação dos conceitos da mecânica clássica (a distância, o tempo e a velocidade); e da aplicação do conceito de limite e continuidade.

Os itens das tarefas são considerados cumprirem os critérios das diferentes facetas dos conteúdos algébricos e didáticos, como propostos na seção 3 deste trabalho, mesmo que não questionem cada faceta para cada um do nível do ensino.

Apresenta-se em seguida, no quadro 3, uma estimação dos índices das dificuldades sentidas em cada item. Utiliza-se um grau de correção das respostas, em que se categoriza o valor 0 para uma resposta errada e o valor 1 para uma resposta correta. De seguida calcula-se a média de pontuação de cada item (por exemplo, no caso 1.a, temos respostas certas 16; resposta errada, 8; índice de dificuldade, $\frac{16}{24}$). Baseia-se na média de pontuação de cada item, transforma-se estas pontuações em intervalo [0-100]. Interpreta-se um valor de 100 como um indicador de que um item é muito fácil e um valor de 0 é considerado como indicador para um item é muito difícil.

Quadro 3 - Índice de dificuldade dos itens de questionário

Item	Índice de dificuldade
1a. Igualdade de balança de sumo. Resolução	66,7
1b. Igualdade de balança de sumo. Interpretação	37,5
2a. Padrão, Sequencia e regularidade. Resolução	66,7
2b. Padrão, Sequencia e regularidade. Resolução	50
2c. Padrão, Sequencia e regularidade. Enunciação da tarefa	58,3
2d. Padrão, Sequencia e regularidade. Reconhecimento álgebra	50
3a. Equação linear do custo da comida. Resolução	33,3
3b. Equação linear do custo da comida. Solução aritmética	0
3c. Equação linear do custo da comida. Solução algébrica	0
4a. Interpretação de 1ª expressão	87,5

Interpretação de 2ª expressão	45,8
Interpretação de 3ª expressão	8,3
4b. Enunciação de problema	12,5
5a. Família da função quadrática. Observação gráfica	-
5b. Família da função quadrática. Análise dos efeitos do parâmetro	1,7
5c. Família da função quadrática. Reconhecimento álgebra	41,7
6a. Sistema das equações lineares do movimento da *kayak*. Resolução	0
6b. Sistema das equações lineares do movimento da *kayak*. Enunciação da tarefa aritmética	0
6c. Sistema das equações lineares do movimento da *kayak*. Enunciação da tarefa algébrica	0
7a. Sistema das equações lineares com a forma geral. Resolução	0
7b. Sistema das equações lineares com a forma geral. Reconhecimento álgebra	100
7c. Sistema das equações lineares com a forma geral. Enunciação da tarefa algébrica	87,5
8a. Limite e continuidade da taxa do imposto do salário. Solução algébrica	0
8b. Limite e continuidade da taxa do imposto do salário. Reconhecimento álgebra	0
8c. Limite e continuidade da taxa do imposto do salário. Justificação	0

As tarefas de modelação são consideradas muito difíceis, com índice de dificuldade 33,3 na tarefa 3 (o custo de comida) e com índice de dificuldade 0: tarefa 6 (o movimento de *kayak*) e tarefa 8 (a taxa imposto do salário). A maioria destas dificuldades vem da realidade de que não conseguem traduzir da linguagem natural para linguagem Matemática e na compreensão das tarefas.

Os futuros professores têm maior dificuldade na resolução de um sistema de equações com duas incógnitas em modo geral (tarefa 7a), eles utilizaram um exemplo particular para o resolver, utilizaram o método de eliminação ou de substituição ou de conjunto de eliminação e substituição. Manifestaram, também, uma grande dificuldade, em relação à análise dos efeitos do parâmetro *a* de uma função quadrática (índice 1,7); e quanto à interpretação da expressão de uma fórmula para calcular o valor da variável P com base da variável *c* e da variável *l* (índice 8,3), no item 4a da 3ª expressão.

Os item considerados mais fáceis (índice de dificuldade 66,7) são as tarefas relacionadas com a igualdade da balança (tarefa 1a) e o termo de uma sequência (tarefa 2a). Encontra-se a maior percentagem da respostas corretas relativamente ao reconhecimento algébrico, como se revela no índice de dificuldade nas tarefas sobre: padrão, sequência e regularidade de *lafatik* (índice 58,5); família da função quadrática (índice 41,7); e sistema das equações lineares (índice100).

No enunciado das tarefas (construção de uma tarefa), mostra-se um elevado índice de dificuldade relativamente às tarefas estruturais: 58,3 na tarefa do padrão, sequência e regularidade de *lafatik* e 87,5 na tarefa do sistema das equações lineares.

O quadro 4 apresenta a categorização dos níveis de RA das respostas dos futuros professores relativamente aos 11 itens das questões sobre o conhecimento algébrico.

Quadro 4 - Categorização das respostas obtidas baseia-se na categorização do nível de RA (GODINO et al., 2015)

Tarefa	Resposta Correta							Resposta Errada
	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	
1a	7			9				8
2a	14			1				9
2b	11	1		1				11
3a		6		2				16
4a, 1ª expressão				21				3
4a, 2ª expressão				11				13
4a, 3ª expressão				2				22
5b					16	4		4
6a								24
7a				15				9
8a								24
Total	32	7	0	62	16	4		143

Baseando-se no quadro 4, conclui-se que 54,2% das respostas são incorretas (143 respostas) e 45,8% (121 respostas) são corretas. A maioria das respostas incorretas são das tarefas de modelação: do custo de comida (16 respostas); do movimento de *kayak* (24 respostas); e da taxa do salário (24 respostas).

Das 121 respostas corretas categorizados no nível 3 de RA (62 respostas) e no nível 0 de RA (32 respostas), apenas uma pequena quantidade de respostas estão categorizados em outros níveis de RA.

Identifica-se, no quadro 4, as várias soluções que manifestam o nível 0 de RA que estão indicados pelas: utilizações da linguagem natural e sem realização da operação algébrica, ou apenas uma apresentação do resultado final sem justificação (tarefa 1); e utilização de uma observação da figura para responder (tarefa 2).

A maioria das respostas que estão categorizadas no nível 3 de RA são das tarefas estruturas: tarefa 1 (a balança do sumo) e tarefa 7 (um sistema das equações lineares com duas incógnitas). Na tarefa 7 não se encontrou as soluções de forma geral, os futuros professores construíram exemplos particulares e resolveram com vários métodos de resoluções. Mesmo assim, estas soluções estão categorizados neste nível pela utilização dos símbolos e pelas operações algébricas. O maior número das respostas que manifesta este nível de RA indicou-se, também, na tarefa 4, sobre as expressões algébricas de uma equação (21 respostas) e uma função (11 respostas).

Identifica-se, também, uma manifestação do nível de RA mais avançado na tarefa 5 sobre os efeitos do parâmetro nos gráficos da função quadrática. As 4 soluções estão categorizados no nível 5 que se indicam pela observação gráfica dos efeitos do parâmetro *a* e pela generalização. Categorizou-se, no nível 4 de RA, as 16 soluções que utilizam uma observação gráfica sobre os efeitos do parâmetro *a*, mas não se conseguiu tirar uma generalização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste estudo foi desenvolver um instrumento válido para caracterizar aspetos relativos ao conhecimento didático-matemático sobre o RA na formação de professores. Este objetivo tem o foco no diagnostico do conhecimento de professores em formação e serve para obter dados que podem ser utilizados na fase de intervenção educativa, isto é, na concepção, implementação e avaliação de processos de formação de professores sobre o tema.

A configuração das tarefas deste questionário foi baseada em todas as categorias do conteúdo algébrico (estrutura; funcional e modelação), e em todas as categorias do conteúdo didático: faceta epistémica, como reconhecimento algébrico e resolução com procedimento exclusivo aritmético ou algébrico; faceta cognitiva, como resolução de problema; faceta instrucional, como construção ou modificação da tarefa; faceta conteúdo algébrico (apenas conhecimento comum ou avançado), tendo em conta a proposta do CDM (GODINO *et al*., 2015).

Neste trabalho, identificou-se a dificuldade dos futuros professores nas tarefas de modelação. Esta dificuldade mostrou a falta de envolvimento dos processos matemáticos importantes tais como compreender, traduzir da linguagem natural para linguagem Matemática, descrever, resolver, interpretar e representar relações quantitativas. Por isso, considera-se a necessidade de que os estudantes tenham uma disciplina sobre a modelação Matemática. Além disso, para aumentar os seus conhecimentos, sobre os conceitos de sequência e regularidade, equação, e função.

Identificou-se, também, algumas dificuldades dos futuros professores sobre o RA. Estas dificuldades manifestaram-se sob a forma de uma grande percentagem de respostas incorretas, indicando um baixo nível de RA, mais especificamente o nível 3. A dificuldade dos futuros professores na sua formação inicial sobre RAE indicado, também ocorreu, no estudo do Godino *et al*. (2014), que foi realizado em Espanha e Portugal, nomeadamente na Universidade de Aveiro.

Com base neste estudo, o resultado deste questionário mostra que há necessidade de os futuros professores terem formação adequada que lhes permita desenvolver as habilidades didático-matemático em atividades que envolvem o raciocínio algébrico, básico e secundário, com base nesse estudo. Considera-se que em Timor - Leste as reformas recentes na disciplina de Matemática, quer no Ensino Básico quer ao nível do Ensino Secundário Geral, exigem conhecimentos de Álgebra, pelo que esta formação deve promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos e a especificidade de ensinar. Este desenvolvimento do conhecimento algébrico deve “integrando conteúdos e pedagogia e ensinando os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos” (PONTE e CHAPMAN, 2008).

Para investigação futura deve ter-se em consideração a melhoria do desenho de tarefas, de natureza algébrica, em especial as tarefas que envolvem modelação Matemática. Deve, também, promover-se o desenvolvimento de níveis elevados de RA através de tarefas adequadas a esse fim, nomeadamente a resolução de problemas.

Relativamente ao sentido de melhoria, quer para este trabalho e quer para futuras investigações, proposita-se melhoria em algumas tarefas, em particular reformular as tarefas de modelação e desenvolver o problema cuja soluções promova o nível de RA mais avançado.

Estes níveis de raciocínio algébricas devem ter implicações na formação de professores, tanto no Ensino Básico e Secundário. Não é suficiente para desenvolver propostas curriculares (NCTM, 2008), incluir álgebra desde os primeiros níveis de ensino; o professor é obrigado a agir como agente principal da mudança na introdução e desenvolvimento do raciocínio algébrico na sala de aula elementar e estabelecer a sua progressão no ensino secundário. Assim, o reconhecimento de objetos e processos de pensamento algébrico pode ajudar a identificar características de práticas Matemáticas em que os professores podem intervir para aumentar gradualmente os níveis de RA da atividade Matemática dos alunos.

REFERÊNCIAS

AKÉ, L. P.. **Evaluación y desarrollo del razonamiento algebrico elemental en maestros en formación**. Tese Doutoral - en el programa de Doctorado de Didática de la Matemática de la Universidad de Granada, España, 2013, p. 1-529.

BLANTON, M. L., e KAPUT, J. J.. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** 2005. 36(5), p. 412-446.

BOGDAN, R., e BIKLEN, S.. **Investigação qualitativa em educação:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, Ed., 2013.

BRANCO, N., e PONTE, J. P. DA.. Developing algebraic and didactical knowledge in pre-service primary teacher education. In: **36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 2012. p. 75-82.

CARRAHER, D. W., e SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, 2007. *2*, p. 669-705.

CONTRERAS, A., ORDOÑEZ, L. e WILHELMI, M. R. Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. **Enseñanza de las ciencias**, 2010. 28(3), p. 367-384.

EUGENIO, F. Y., ROJANO, T., e PUIG, L. Educational algebra: A theoretical and empirical approach . **Springer Science & Business Media**, 2007. 43.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, 2009. *20*, p. 13-31.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,** 2013. 11, p. 111-132.

GODINO, J. D., AKÉ, L. P., GONZATO, M., e WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, 2014. *32*(1), p. 199-219.

GODINO, J. D., BATANERO, C., e FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM**, 2007. *39*(1-2), p. 127-135.

GODINO, J. D., FERNANDEZ, T., LACASTA, E., NETO, T., WILHELMI, M. R., CONTRERAS, Á., … LASA, A. Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. **Enseñanza de Las Ciencias**, 2015. *33*(1), p. 127-150.

HILL, H. C., BALL, D. L., e SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, 2008. p. 372-400.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Associação de Professores de Matemática. 2008.

PONTE, J. P., e CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. **Handbook of International Research in Mathematics Education**, 2008. p. 223.

SOCAS, M. La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. **Números**, 2011. 77, p. 5-34.

RECEBIDO EM: 23 ago. 2016.
CONCLUIDO EM: 20 set. 2016.