VIDYA, v. 36, n. 1, p. 79-92, jan./jun., 2016 - Santa Maria, 2016. **ISSN** 2176-4603

CUESTIONANDO LAS ORIENTACIONES DEL CURRÍCULO. UN ENFOQUE ALTERNO PARA EL CONCEPTO DE ÁREA

QUESTIONING THE CURRICULUM GUIDELINES. AN ALTERNATIVE APPROACH TO THE CONCEPT OF AREA

DIANA CAROLINA PÉREZ DUARTE*
MARY FALK DE LOSADA**

RESUMEN

A menudo el aprendizaje de la medición se ha basado casi exclusivamente en la memorización de fórmulas usando un enfoque de tipo mecanicista y limitando la intervención del estudiante a la aritmética, en lugar de dar oportunidad a los estudiantes a potencializar su pensamiento y autonomía en la construcción de significado geométrico de la medida. El campo de interés de la presente investigación está centrado en la construcción de significado robusto del concepto de área por medio de un pensamiento netamente geométrico y operacional (en el sentido piagetiano). Los resultados con los que se ilustra la presentación provienen del trabajo directo con estudiantes entre 10 y 13 años de cuatro colegios de la ciudad de Bogotá cuyos estudiantes presentan diferentes perfiles socio-económicos.

Palabras Claves: Descomposición. Recomposición. Comparación de figuras geométricas. Construcción de significado del concepto de área.

ABSTRACT

Often the learning of measurement has been based almost exclusively on memorizing formulas using a mechanistic approach and limiting the student intervention to arithmetic, instead of giving opportunity for students to potentiate their thinking and autonomy in the construction of geometric meaning for measuring. The field of interest of this research is focused on the construction of robust meaning for the concept of area by means of purely geometric and operational (in the Piagetian sense) thinking. The results illustrating the presentation come from direct work with students between 10 and 13 years of age from four schools in Bogota with different socio-economic profiles.

Keywords: *Decomposition. Recomposition. Comparison of geometric figures. Construction of meaning for the concept of area.*

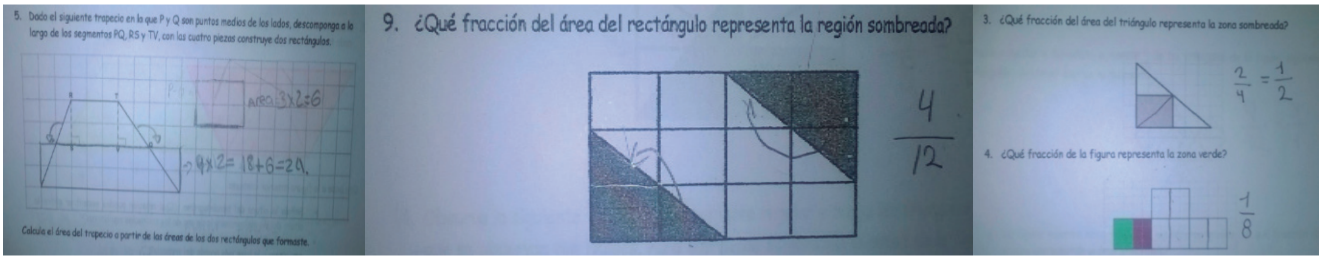
* Master en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño y profesora de la facultad de ciencias. E-mail: dianacperez@uan.edu.co
** Profesora de los programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño. E-mail: mariadelosada@gmail.com

INTRODUCCIÓN

En la literatura matemática se encuentran problemas no rutinarios, incluyendo problemas de olimpiadas populares, diseñados para ser atractivos a una población objeto.

Dentro de éstos se encuentra una gran cantidad relacionada con la geometría y la medición de áreas y cuya solución requiere pensamiento autónomo, creativo y un enfoque geométrico del concepto de área, muy diferente del tratamiento que vive el estudiante por lo general en el salón de clases. En la Figura 1 se muestran tres ejemplos.

Figura 1 - Respuestas de los estudiantes.



Fuente: Del autor.

Al realizar un análisis de los problemas y buscar los orígenes de su enfoque, se pudo mostrar que están planteados en el espíritu de la matemática griega clásica y el tratamiento que en ella se da del concepto de área, siendo éste netamente geométrico con importantes raíces además en la teoría de la proporcionalidad. En una investigación anterior (PÉREZ y FALK, 2011), se mostró que este enfoque permite a los estudiantes de sexto grado construir significado robusto[1] para el concepto de área, mientras que la presentación usual de fórmulas y ejercitación de cálculos aritméticos basados en éstas revela una honda falencia de significado tal que muchos estudiantes reclaman, y muchos profesores observan, que confunden área y perímetro.

Como pregunta para una nueva investigación recientemente culminada se planteó: ¿cuáles son las experiencias que deben fomentarse y cómo puede caracterizarse el pensamiento geométrico involucrado para construir significado robusto del concepto de área en los estudiantes de grado sexto? En ella también se buscó caracterizar el pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado del concepto de área para comparar o contrastarlo con la teoría de Tall (2013).

En este escrito se presenta un análisis de las raíces geométricas del concepto de área, así como una valoración, más de su aceptabilidad, de la conveniencia del uso de un enfoque geométrico similar que permite a los estudiantes construir significado certero y robusto del concepto, y desarrollar su pensamiento matemático en el proceso. Resultados previos de esta investigación se presentaron en Pérez y Falk (2011) antes citado.

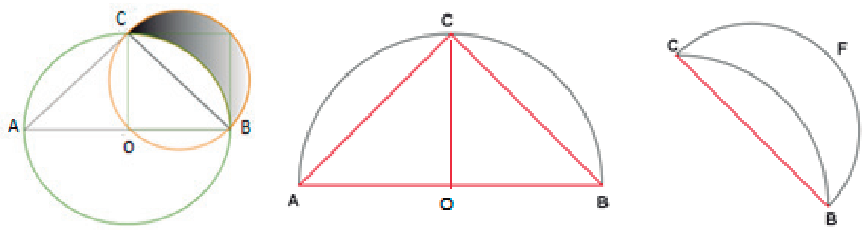
Se acude a un referente teórico que sustenta el trabajo y para ello se realiza un análisis de la construcción del concepto de área en las matemáticas griegas. Éste forma parte de la documentación teórica de la investigación en la cual se estudian aspectos del trabajo de los principales autores que trataron el concepto de área con fundamentación geométrica.

[1] Pérez, D (2016) define significado robusto como la construcción de redes conceptuales que desarrolla el estudiante para dar solución a problemas no rutinarios.

ALGUNOS ANTECEDENTES DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN LA MATEMÁTICA GRIEGA

Hipócrates de Quíos, fue el geómetra más importante del siglo V a.C. y escribió una obra de tipo enciclopédico titulada los “Elementos” para reunir todo el saber matemático de su época. En lo que se ha conservado de la obra de Hipócrates de Quíos se aprecia el problema central del tratamiento de área que es el de construir un cuadrado cuya área sea igual al área de una figura dada (cuadratura). Nótese, entonces, que el planteamiento central concierne “igualdad de áreas” de distintas figuras y no concierne asignar un valor numérico determinado que represente el área de una figura dada. En este contexto Hipócrates resolvió problemas sorprendentes relacionados con la cuadratura del círculo, esto es, problemas de encontrar regiones poligonales con la misma área que ciertas regiones curvilíneas (lúnulas), figuras que, por su parentesco con el círculo, están fuera de lo ordinario (entendiéndose que el círculo es una figura ordinaria en la geometría de la regla y el compás). Se presenta a continuación una cuadratura de lúnula atribuida a Hipócrates con el objetivo de mirar el pensamiento geométrico involucrado en ella, como se observa en la Figura 2. Comienza inscribiendo un triángulo rectángulo isósceles en un semicírculo.

Figura 2 - Demostración de la cuadratura de la lúnula.



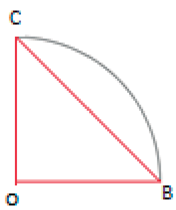
Fuente: Del autor.

Sea O el centro del semicírculo mayor. Se sabe que las áreas de dos círculos (y por ende dos semicírculos) son entre sí como los cuadrados de sus diámetros.

Área del semicírculo ABC / Área del semicírculo BCF = AB^2/BC^2

AB es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es BC. Citando el problema tratado por Sócrates (ver más adelante), entonces, el área del cuadrado cuyo lado es AB es el doble del área del cuadrado cuyo lado es BC. Esto es, $AB^2/BC^2 = 2$. Por ende, el área de un medio del semicírculo con diámetro AB que se muestra en la figura siguiente,

Figura 3 - Continuación de la demostración de la cuadratura de la lúnula.

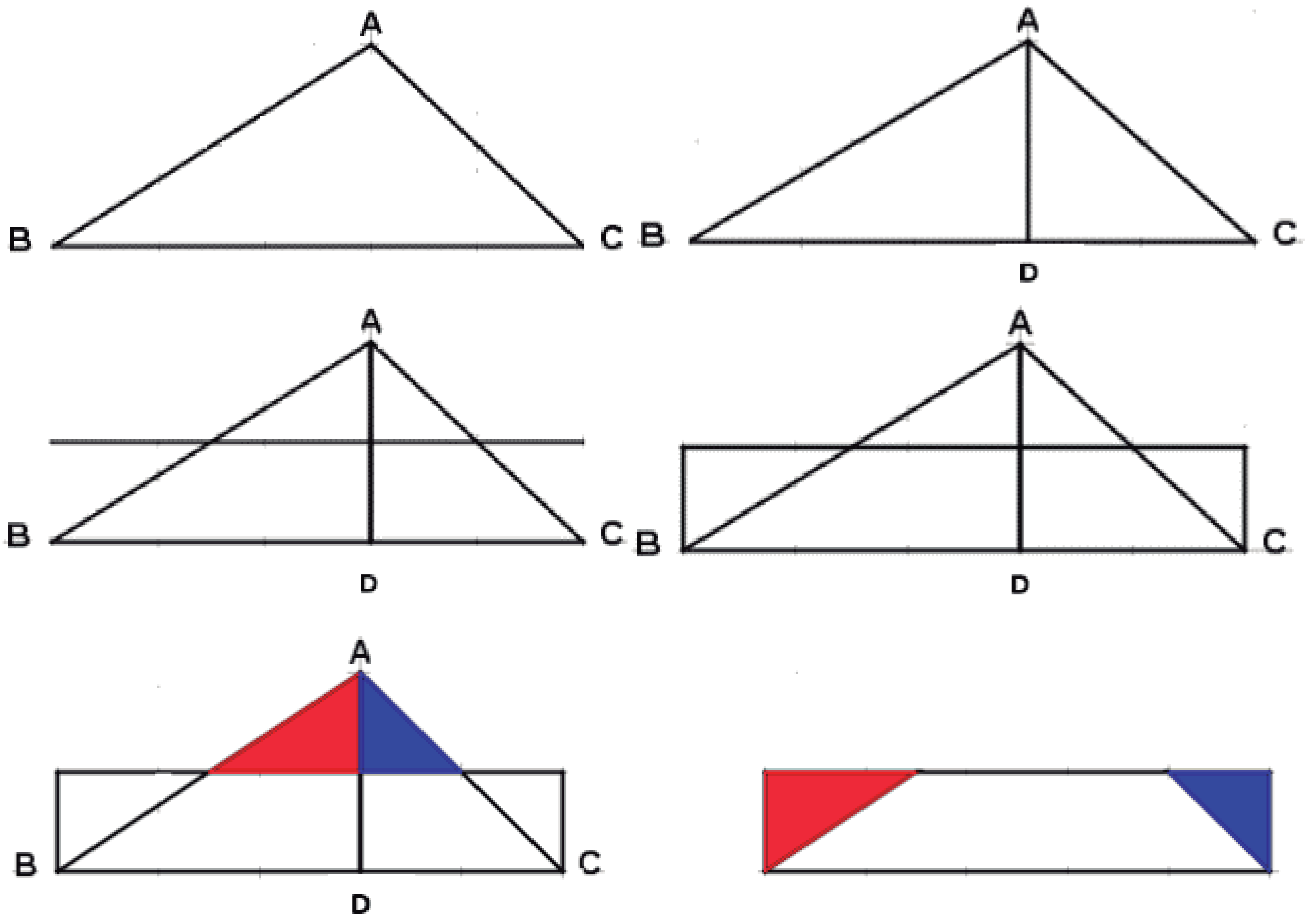


Fuente: Del autor.

Es igual al área del semicírculo con diámetro BC. Restamos de ambos el segmento de círculo que comparten (sobre la cuerda BC) y se tiene que la lúnula BCF es igual en área al triángulo rectángulo isósceles BOC. Se observa, entonces, que Hipócrates en sus demostraciones utilizó descomposiciones de las regiones en partes para afirmar la igualdad de áreas utilizando las propiedades de las figuras geométricas.

Lograda esta demostración, Hipócrates afirma que se ha realizado la cuadratura de la lúnula. Subyace a esta afirmación el entrelazamiento de resultados y el demostrar cada resultado nuevo en términos de proposiciones ya demostradas. Pues, dado que Hipócrates ha demostrado que la lúnula tiene área igual al triángulo isósceles, Hipócrates se basa en resultados anteriores para afirmar que la lúnula es igual en área a un cuadrado. En la siguiente figura se indica cómo construir un rectángulo equivalente a (cuya área sea igual al área de) un triángulo dado, como se observa en la Figura 4.

Figura 4 - Equivalencia de área entre un triángulo - rectángulo.



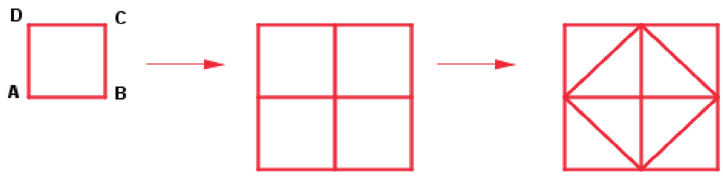
Fuente: Del autor.

Igualmente, Hipócrates se está basando en la construcción ya conocida de un cuadrado igual en área a un rectángulo dado.

Por otra parte en el proceso de revelar parte de su teoría del conocimiento **Platón** aborda un problema elemental de áreas en el diálogo socrático *El Menón.* Platón, hablando por intermedio de

Sócrates, plantea el problema de la duplicación del cuadrado, o sea, el problema de construir un cuadrado cuya área sea el doble del área de un cuadrado dado. En el diálogo con un joven foráneo, Sócrates, a partir de preguntas, conduce a la siguiente construcción que se muestra en la Figura 5. Se tiene un cuadrado ABCD cualquiera y se pretende hallar otro cuya área sea el doble del área del cuadrado dado.

Figura 5 - Hallar un cuadrado cuya área sea el doble del área del cuadrado dado.



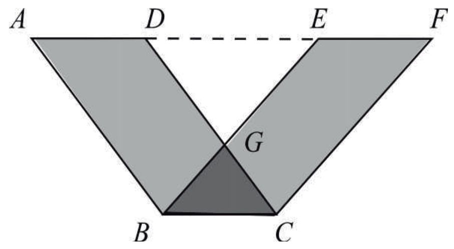
Fuente: Del autor.

El joven foráneo toma el cuadrado y duplica el lado. Pero esto deja cuadruplicada el área. Después de otras preguntas y la orientación de Sócrates (método socrático) se conduce al joven a trazar las diagonales en cada cuadrado quedando éstos divididos en dos partes iguales, y se obtiene un nuevo cuadrado formado por cuatro de los triángulos rectángulos que se muestran, mientras que el cuadrado original es formado por dos de los mismos, de modo que el cuadrado cuyos lados son las diagonales que se han trazado tiene área igual al doble del área del cuadrado original. Se enfatiza en la razón entre áreas, con un enfoque visual y geométrico en diagramas que aparecen tal cual se presentan en el mismo diálogo platónico. Si bien no se tenía forma de expresar esa magnitud con exactitud numéricamente, sí se podría representar con exactitud por la magnitud de la diagonal del cuadrado unitario. La existencia de números no conmensurables con la unidad (no expresables como una razón entre números enteros) llevó a la matemática griega a privilegiar la geometría sobre la aritmética, y a desarrollar un concepto de área basado en igualdad y comparación de áreas, en el cual el área no es representada en general por una cantidad numérica.

Por otro lado, **Eudoxo** definió razón de magnitudes y a partir de ella proporción o igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables, o sea magnitudes racionales e irracionales. La respectiva teoría generalizada de la proporción se encuentra recopilada en el Libro V de los Elementos de Euclides. Además, Eudoxo desarrolló el método de exhausción o agotamiento para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. Fundamentalmente aproximaba estas figuras por otras poligonales para las que sí conocía el valor del área o volumen, tanto por exceso como por defecto, utilizando una doble reducción al absurdo. Más exactamente, este método griego de agotamiento consistió en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a ella, aumentar el número de los lados de los polígonos, argumentar acerca de la diferencia entre el área de la figura dada y las de los polígonos inscrito y circunscrito, y así hallar el área buscada, usando aproximaciones sucesivas, por medio del cual se buscaba equivalencias entre las áreas de figuras no rectilíneas y las figuras rectilíneas asimilables al cuadrado.

Euclides en sus exposiciones no definió formalmente área, pero en sus demostraciones se acerca a las definiciones actuales y supone, sin enunciarlo, que triángulos iguales (congruentes) tienen igual área. Euclides muestra que ciertos polígonos son iguales a otros, pero dando un nuevo significado de igualdad, ya no es considerada la igualdad como una congruencia, sino se toma como igualdad de áreas, o equivalencia de áreas. Además, para la realización de sus demostraciones de igualdad de área, procede efectuando divisiones de polígonos para recomponerlos en otros, o para comparar las partes constitutivas de éstos. Esto aparece por primera vez en la proposición I-35: Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí. La Figura 6 que se muestra a continuación ayuda a entender la demostración de Euclides.

Figura 6 - Proposición I-35.



Fuente- Figura tomada de *Los seis libros primeros de Euclides, Camorano, R (2007)*.

Los paralelogramos ABCD y EBCF, comparten la base BC y tienen los lados opuestos a BC en la paralela AF. Se puede observar que el triángulo BCG es común a los dos paralelogramos. Para demostrar la igualdad de los trapecios ABGD y FEGC podemos evidenciar que ambos trapecios provienen de restar el triángulo DEG a los triángulos EAB y FDC que son iguales (congruentes) por la igualdad de sus tres lados, hecho demostrado citando propiedades de los paralelogramos que ha demostrado con anterioridad. En la demostración anterior es evidente que no se emplean números en su discurso, se demuestra a través del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas.

Euclides demostró la proposición I-47 conocida como el "Teorema de Pitágoras" mostrando la equivalencia de la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados adyacentes al ángulo recto en un triángulo rectángulo, con el área del cuadrado construido sobre lado opuesto al mismo ángulo. Lejos de la formulación algebraica que comúnmente se cita hoy en día, en Euclides el Teorema de Pitágoras es netamente geométrico, concierne la igualdad de áreas y se demuestra haciendo uso de una descomposición del cuadrado sobre la hipotenusa en dos rectángulos.

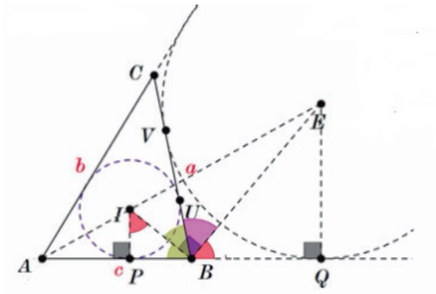
Arquímedes utilizó con gran maestría el método de exhausción para determinar relaciones entre las áreas de diferentes figuras. Así Arquímedes mostró que el área de un círculo es equivalente al área de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean uno de magnitud igual al radio del círculo y el otro de magnitud igual a la longitud (perímetro) de dicho círculo. Si bien esta proposición continúa la tradición de centrarse en igualdad de áreas, adicionalmente en el trabajo de Arquímedes se nota el comienzo de una transición hacia fórmulas aritméticas para expresar el área de las figuras geométricas, pues él utilizó el mismo método de exhausción para dar una aproximación del valor de la constante que hoy día se denota por ϖ ($3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$), que posteriormente reemplazaría el uso de proporcionalidad entre los cuadrados de los radios de dos círculos para comparar sus áreas[2].

Con respecto a **Herón**, se le atribuye la fórmula para el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus tres lados donde $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es el semiperímetro del

[2] Algunos detalles adicionales pueden ser encontrados en http://www.storyofmathematics.com/hellenistic_archimedes.html

triángulo y *a, b, c* las longitudes de sus lados, cuya demostración es puramente geométrica, a partir de un triángulo dado ABC como se observa en la siguiente Figura 7.

Figura 7 - Triángulo donde Herón realiza su demostración.



Fuente: A History of Greek Mathematics, Thomas, H (1981).

En dicha demostración se observa herramientas puramente geométricas con base en proporciones, equivalencias, semejanzas y comparaciones de áreas.

MODELO DIDÁCTICO GENERADO PARA LA INVESTIGACIÓN

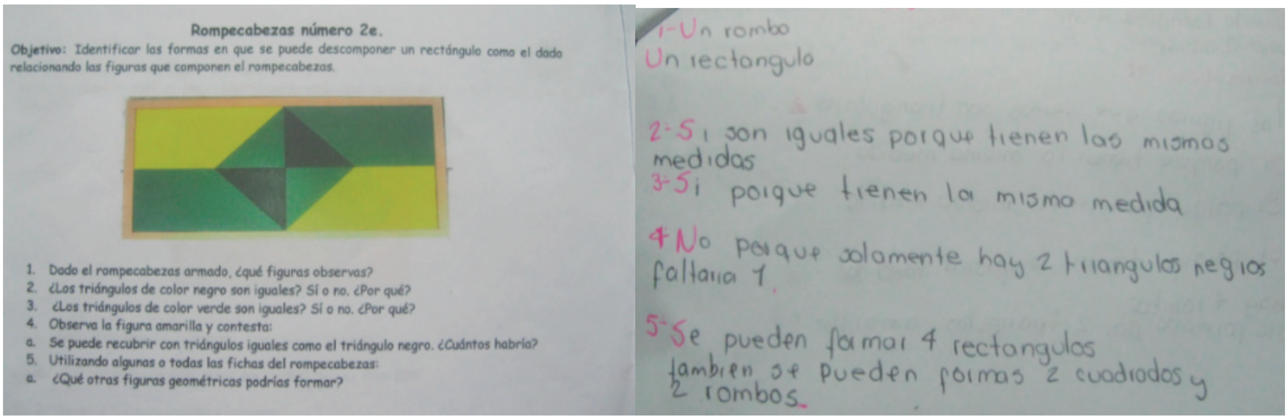
A continuación, se realiza una presentación de un modelo que retoma elementos importantes del desarrollo histórico de la geometría para la construcción de significado del concepto de área realizada por estudiantes de grado sexto trabajando en grupos de dos, tres o cuatro estudiantes. El modelo consta de cinco partes que se describen a continuación.

- Manipulación física de descomposición y recomposición de figuras geométricas usando rompecabezas especialmente diseñadas
- Imaginar y trazar líneas de descomposición de figuras, imaginar y trazar recomposiciones usando implícitamente propiedades de las piezas, comparar.
- Comparar (áreas de) figuras usando descomposiciones en unidades de referencia.
- A partir la forma de calcular el área de un rectángulo dadas sus dimensiones, descomponer y recomponer otras figuras (paralelogramo, triángulo, trapecio) para expresar sus áreas en términos de base(s) y altura.
- Razones de proporcionalidad entre longitudes de lado y área de figuras poligonales regulares. Analogía con el círculo.

Para el desarrollo del estudio se propusieron, entonces, las siguientes actividades.

Actividades de descomposición y recomposición con rompecabezas (figuras geométricas específicas). Se presentan 12 rompecabezas de diseño original que contienen una muestra de figuras geométricas comunes y una guía de preguntas que acompaña a cada uno. Observe el siguiente ejemplo que se muestra en la Figura 8.

Figura 8 - Respuestas de los estudiantes.

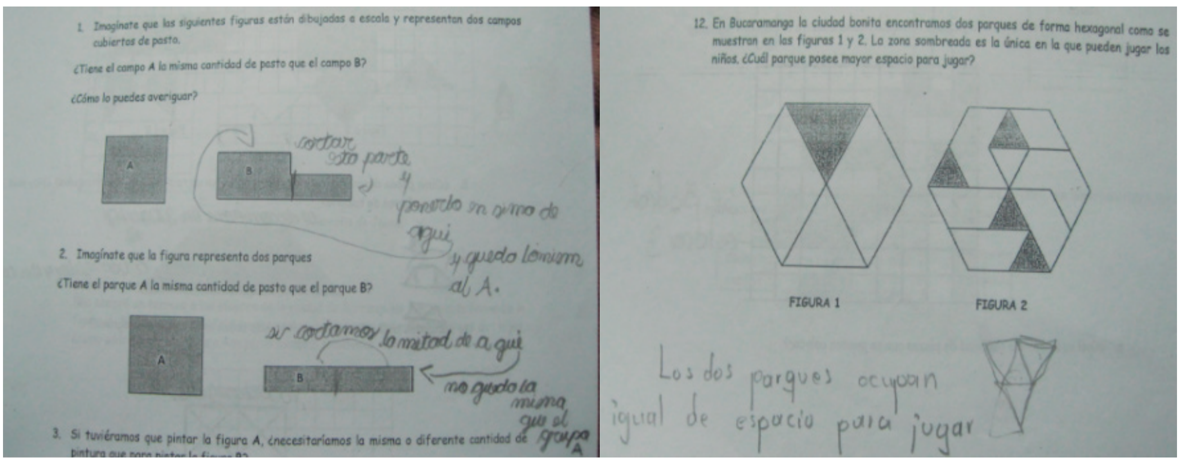


Fuente: Del autor.

Realización de talleres especialmente diseñados de acuerdo a los problemas olímpicos bajo un enfoque euclidiano - griego. El diseño de estas actividades se desarrolló con problemas en los cuales se requiere una simple respuesta, tomados de los libros de Olimpiadas de Matemáticas de Primer Nivel año 2002, 2005 y 2009. También se presentan otros que invitan a una solución completa del estudiante con su respectiva justificación, para determinar la manera en que ha construido el significado del concepto de área.

Descomposición y recomposición. Se le presentaron a cada grupo de trabajo 16 problemas interesantes, como los siguientes en los cuales se muestra el trabajo autónomo de los estudiantes, y en los cuales los estudiantes debían realizar descomposición y recomposición de figuras, planteados en relación con experiencias cotidianas y matemáticas (ver Figura 9).

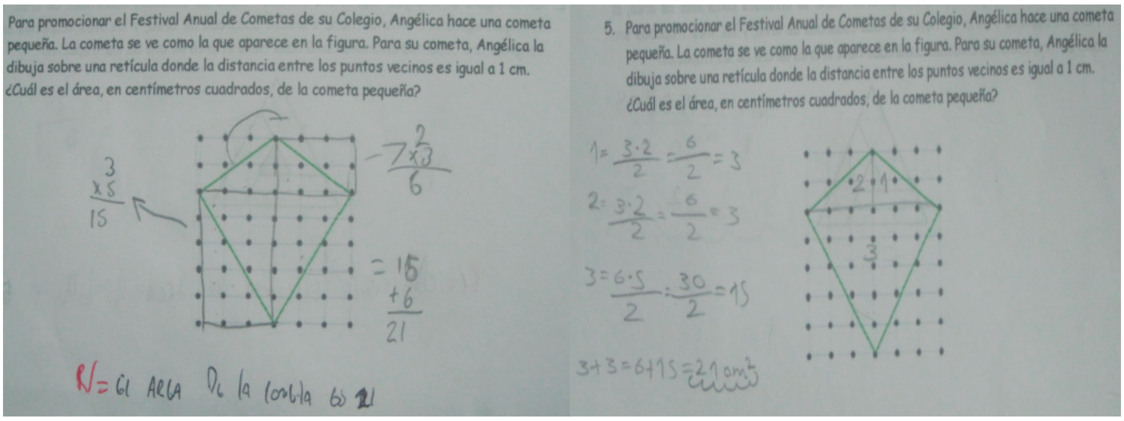
Figura 9 - Respuestas de los estudiantes.



Fuente: Del autor.

Comparación. Se presentaron 15 problemas compuestos de diferentes figuras geométricas planas con el objetivo de que los estudiantes hallaran el área de una conociendo la de la otra. Nuevamente se presenta el trabajo realizado por los grupos de estudiantes en su solución (ver Figura 10).

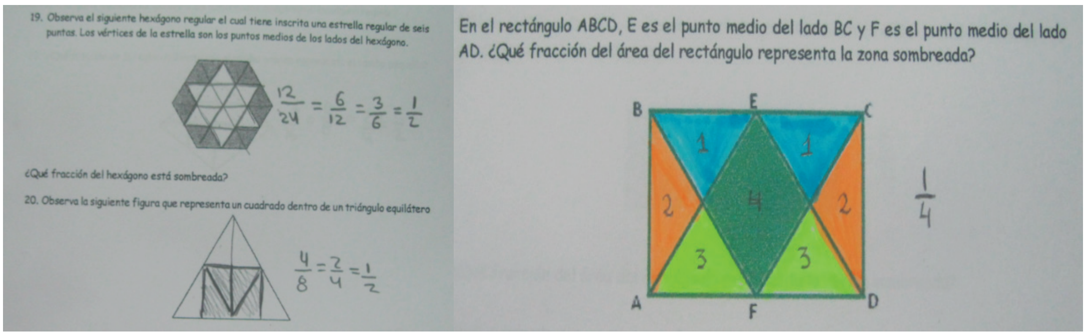
Figura 10 - Respuestas de los estudiantes.



Fuente: Del autor.

Actividades de razón entre áreas (comparación aritmética). Se presentaron 22 problemas, y para cada pregunta se presentó una serie de figuras geométricas, divididas en componentes, iguales o no, donde se buscó que, de manera individual y grupal, se determinara cuál es la razón entre las respectivas áreas (ver Figura 11).

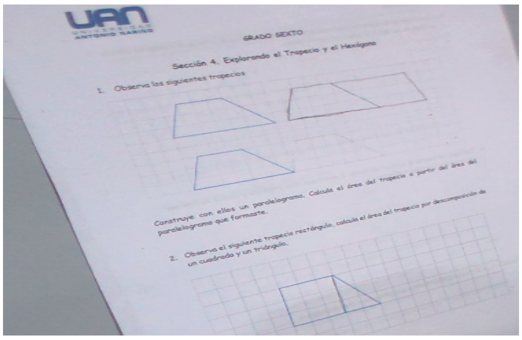
Figura 11 - Respuestas de los estudiantes.



Fuente: Del autor.

Deducción de fórmulas aritméticas. Se plantearon situaciones en las cuales el estudiante debió analizar la relación rectángulo-paralelogramo, triángulo-paralelogramo, paralelogramo - trapecio, triángulo - trapecio, entre otras, y de esta forma comenzar a usar los resultados y las actividades anteriores para generar, él mismo, fórmulas para calcular el área de esas figuras, a través de la descomposición y recomposición en una figura para la cual se conoce de antemano una fórmula (ver Figura 12).

Figura 12 - Respuestas de los estudiantes.

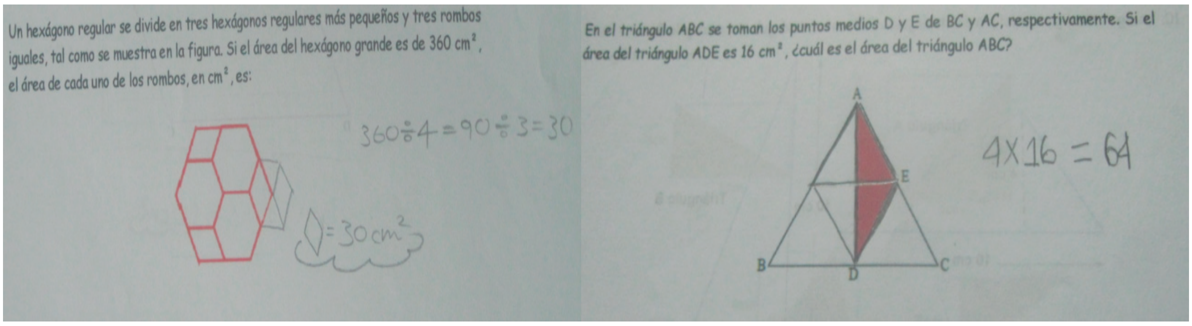


Fuente: Del autor.

TRANSICIÓN DE LO GEOMÉTRICO A LO ARITMÉTICO

Para que el estudiante llegara a encontrar procedimientos aritméticos - algebraicos en la solución de un problema para calcular el área de una figura o región, se idearon actividades de descomposición y recomposición de las figuras basadas en una fórmula primitiva tomada como conocida, la del rectángulo, (y a partir de ahí las del paralelogramo y el triángulo) como se muestra en los siguientes problemas (Figura 13).

Figura 13 - Respuestas de los estudiantes.



Fuente: Del autor.

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL MODELO

Al terminar la actividad de rompecabezas los estudiantes utilizaron procesos de visualización, entendiéndose ésta como:

> [...] los procesos y capacidades de las personas para realizar ciertas tareas que requieran “ver” o “imaginar” mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones con los mismos” (GODINO, 2012, p. 109-130).

Por otra parte, Bower (1983), Hitt (1998), entre otros, relacionan el pensamiento geométrico y la visualización. En sus trabajos brindan importancia a la relación entre los objetos geométricos y el desarrollo de determinadas operaciones o transformaciones.

También consideran significativo el proceso de generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de las habilidades de visualización en la resolución de problemas en el salón de clases.

En la investigación los estudiantes utilizan estos procesos de visualización para descubrir figuras dentro de una figura compuesta invirtiendo y rotando las fichas para obtener otras figuras geométricas además de comparar tamaños de las diferentes figuras obtenidas.

Para la actividad de descomposición y recomposición de figuras y regiones, el 88,6% de los estudiantes empezó a construir el significado de área por medio de la descomposición y recomposición. Algunos estudiantes realizaban estas descomposiciones mentalmente.

Para la actividad de comparación de áreas, el 84% de los estudiantes encontró la unidad de referencia. Para ello los estudiantes tomaron las partes sombreadas de una figura y realizaron las respectivas recomposiciones para obtener figuras geométricas conocidas.

En la actividad dedicada a la razón entre áreas, el 86,4% de los estudiantes encontró la fracción representada por la región sombreada de las figuras planteadas. Los estudiantes observaron y emprendieron diferentes acciones, como el trazar líneas y descomponer la figura. De esta manera, en sus soluciones actuaron sobre las configuraciones para dar argumentos sobre cómo determinar la fracción correspondiente a las regiones sombreadas que se presentaron en los diferentes problemas.

Con respecto a la actividad de exploración de las figuras geométricas para plantear fórmulas para calcular áreas, se obtuvieron los siguientes resultados de respuestas acertadas: para actividad explorando el cuadrado y el rectángulo el 85,5%; para la actividad explorando el rectángulo y paralelogramo el 92,4%; en la actividad explorando el triángulo el 92,6%; y para la actividad explorando el trapecio y el hexágono el 94,4%.

Se observa que el estudiante, para construir y dar solución a problemas de áreas, opera sobre una figura empleando sus propiedades y no solamente contempla esas propiedades, actúa estableciendo y usando las relaciones entre las figuras que dibuja, actúa analizando geométricamente las relaciones entre el área de las figuras resultantes de la descomposición y la de la figura original, y solo entonces interpreta esos resultados en términos de valores numéricos para llegar a una respuesta final.

CONCLUSIONES

El modelo geométrico generado y desarrollado goza de una fundamentación histórica amplia y mostró inequívocamente que permite al estudiante construir significado robusto para el concepto de área. Los problemas no rutinarios involucraron el pensamiento matemático, la imaginación (para hacer trazos, descomponer una figura o región y recomponer las piezas) y el uso implícito de propiedades de figuras geométricas en los estudiantes.

En el contexto de la investigación la imaginación permitió que el estudiante realizara soluciones propias por medio de manipulaciones mentales y físicas, iniciando con actividades de rompecabezas geométricos donde los estudiantes utilizaban descomposiciones y recomposiciones de figuras geométricas, para pasar luego a una etapa de actividades en papel, donde se plantearon diferentes problemas no rutinarios para que los estudiantes encontraran el área de cierta figura geométrica por medio de la utilización de un pensamiento geométrico operacional.

La investigación permitió además caracterizar el pensamiento geométrico utilizado por los estudiantes y contrastar teorías acerca de la naturaleza de ese pensamiento, resultados que serán tratados por las autoras en otros escritos.

Los problemas presentados ayudaron a desarrollar el pensamiento autónomo de los estudiantes, la resolución de problemas y el pensamiento crítico. Se brindó a los estudiantes la oportunidad de tener discusiones sobre los conceptos matemáticos involucrados que los ayudaron en su independencia intelectual.

Teniendo en cuenta la clasificación planteada en esta investigación para la construcción de significado del concepto de área para estudiantes de aproximadamente 12 años de edad, se propone el esquema o mapa conceptual que se muestra en la Figura 14 del Anexo 1.

Como puede apreciarse en el esquema, se parte de observar que una figura geométrica o región del plano puede descomponerse, trazando líneas de subdivisión y efectuando tal descomposición que permite comparar el área de la figura geométrica con la de otras figuras. Si la descomposición se hace en partes iguales la comparación puede hacerse por medio de unidades de referencia.

De otra parte, en el mapa conceptual se puede observar que si se efectúa una recomposición de estas partes, teniendo en cuenta la conservación de área y las propiedades de las figuras, se puede obtener otras figuras geométricas equivalentes y, a partir de ello, buscar fórmulas aritméticas para calcular el área de la figura o región geométrica inicial.

REFERENCIAS

ANACONA, M. Una Empresa Docente. Revista EMA. **La historia de las matemáticas,** v. 8, n. 1, p. 30-46, 2003.

BYRNE, O. **The First Six Books of the Elements of Euclid**. London: Taschen. 1847

CAMORANO, R. **Los seis Primeros Libro de Euclides**. Sevilla. 2007.

DOUGLAS, J. Boletín de la Asociación Matemática de Venezuela. **El problema del área en los elementos de Euclides**, v. 17, n.2, p. 179-206, 2010.

FALK, M. **Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel.** Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2002.

FALK, M. **Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel.** Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2005.

GODINO, J. Revista de investigación y experiencias didácticas. **Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática,** v. 30 n.2, p 109-130, 2012.

GONZÁLEZ, E. **Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel.** Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2009.

HEATH, S. A. **History Greek Mathematics, From Thales to Euclid.** Ox-ford: Printed in England, at the Oxford University Press, 1921.

HERSHKOWITA, R**. Memorias del tercer Congreso Internacional sobre investigaciones de Educación Matemática.** Valencia, 1991.

JAIME, C. **Olimpiadas de matemáticas para primaria: Problemas y soluciones 1995 - 1999**. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2005.

NÁPOLES, J. **Elementos para una historia de las Matemáticas griegas**. Argentina: Universidad Tecnológica Nacional, 2009.

PÉREZ, D. FALK, M. **Diseño, Aplicación y Evaluación de un sistema de Actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado.** Bogotá: Universidad Antonio Nariño. 2011.

PÉREZ, D. Revista Especializada de la Facultad de Ciencias de la Educación. Papeles. **Una propuesta para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado**, v. 5 n.9, p. 87 - 95, 2013.

PÉREZ, D. FALK, M. **Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 13 años).** Bogotá: Universidad Antonio Nariño., 2016.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically**. Cambridge: University of Cambridge. 2013.

THOMAS, H. **A History of Greek mathematics**. New York: Dover Publications,1981.

VERA, F. **Científicos Griegos.** Madrid: Selecciones Gráficas,1970.

RECEBIDO EM: 15 jun. 2016
CONCLUIDO EM: 25 set. 2016

ANEXO 1

Figura 14 - Esquema del proceso para la construcción de significado del concepto de área.