

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE INFERENCIA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD EN ANDALUCÍA

VARIABLES DETERMINING THE INFERENCE PROBLEMS PROPOSED AT THE ENTRANCE TO UNIVERSITY TESTS IN ANDALUCÍA

MARÍA DEL MAR LÓPEZ-MARTÍN*
CARMEN BATANERO**
MARIA M. GEA***
PEDRO ARTEAGA****

RESUMEN

Se analiza el contenido de los ejercicios de inferencia propuestos, durante el periodo 2003-2014, en las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Comunidad de Andalucía (España) de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Se han clasificado dichos ejercicios de acuerdo a los diferentes campos de problemas, el modelo de distribución de la población de partida, el parámetro que se pide estimar y el contexto en el que se presenta el ejercicio, dentro de los considerados en las pruebas PISA. Los resultados indican un predominio de los ejercicios relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza, que son sustituidos progresivamente por ejercicios sobre contraste de hipótesis. Las poblaciones de partida suelen ser binomiales o normales y el parámetro a estimar la media o la proporción poblacional. Se encuentra una proporción importante de ejercicios descontextualizados, en contra de las recomendaciones actuales en la enseñanza de la estadística.

Palabras-clave: Inferencia estadística, pruebas de acceso a la universidad, análisis de ejercicios, Bachillerato de Ciencias Sociales.

ABSTRACT

The aim of this study was to analyze the content of inference problems proposed along the period 2003-2014 at the university entrance tests in Andalucía (Spain) in the specialty of Social Sciences. Through a content analysis we identified the problem field; the distribution of the population; the parameter required to estimate and the context used in the problem, among those proposed in the PISA framework. The results show the prevalence of the problems related to the interpretation and construction of confidence intervals. The initial population is usually binomial or normal and the parameter to be estimated is mainly the population mean or a proportion. An important percentage of problems do not include a context, in contradiction with the recommendations for teaching statistics.

Keywords: *Statistical inference, university entrance test, exercises analysis, assessment, difficulties and mistakes.*

* Doctora en Economía Aplicada, Universidad de Granada, España. E-mail: mariadelmarlopez@ugr.es

** Doctora en Matemáticas, Universidad de Granada. E-mail: cbatanero@ugr.es

*** Doctora en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. E-mail: mmgea@ugr.es

**** Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. E-mail: parteaga@ugr.es

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística ha adquirido gran importancia en las últimas décadas, generalizándose su enseñanza en la mayoría de los grados y másteres universitarios en las universidades. En la actualidad, en España, el estudio de la inferencia se introduce en el segundo curso de Bachillerato (alumnos de 17 años), dentro de la asignatura Matemática Aplicadas a las Ciencias Sociales II, en de la modalidad de Bachillerato en Humanidades y Ciencias Sociales. Los contenidos fijados son los siguientes (MEC, 2007, p. 45476):

Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Estos contenidos se repiten con pocos cambios en los regulados en el nuevo decreto curricular, todavía no implementado en su totalidad (MECD, 2015). Puesto que los estudiantes que cursan el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales reciben menor formación que los del Bachillerato de Ciencias sobre contenidos de álgebra lineal o análisis matemático, es difícil que puedan comprender una presentación formal de la inferencia. Destacamos además el escaso tiempo del que disponen estos estudiantes para dominar la inferencia estadística, pues junto a este tema, se incluyen, en la citada asignatura, contenidos de probabilidad, números y álgebra, análisis y un bloque transversal, relacionado con la resolución de problemas.

La importancia que dentro del aula se da a cada uno de los temas recogidos en las orientaciones curriculares viene indirectamente determinada por las pruebas de evaluación. Los estudiantes españoles, al finalizar los estudios de Bachillerato, deben realizar las Pruebas de Acceso a la Universidad (en adelante PAU), que son obligatorias para poder acceder a la Universidad. Aunque la finalidad principal de las pruebas PAU es evaluar los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros universitarios durante su etapa de Bachillerato, también se utilizan para seleccionar los estudiantes que quieren ingresar en titulaciones y centros de estudio determinados.

En este trabajo analizamos los problemas de inferencia propuestos en las pruebas PAU de la Comunidad Autónoma de Andalucía, celebradas desde 2003 hasta 2014, cuando ha estado vigente el anterior currículo (MEC, 2007), cuyos contenidos de inferencia, como se ha indicado, prácticamente no varían en la nueva ordenación.

Para ello, se han definido una serie de variables que se han considerado relevantes para la formación del estudiante en relación a los problemas de inferencia y que se han deducido del estudio de la investigación previa. Los resultados que se obtienen de este trabajo pueden servir para planificar la enseñanza de la inferencia y preparar a los alumnos para las pruebas finales de Bachillerato previstas en las nuevas directrices educativas.

En las siguientes secciones se describen el marco teórico, antecedentes de nuestro trabajo, la metodología utilizada y los resultados, finalizando con algunas implicaciones para la enseñanza.

MARCO TEÓRICO

Nos apoyamos en algunos elementos del enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), que asume que los objetos matemáticos (en nuestro caso los objetos relacionados con la inferencia estadística) surgen de las prácticas matemáticas realizadas para resolver problemas relacionados con el objeto, considerando el término problema en sentido amplio (incluyendo también ejercicios y tareas). En la enseñanza o la investigación didáctica interesa el estudio de problemas relacionados con el tema; Godino, Batanero y Font (2007) denominan *campo de problemas* a un conjunto de problemas relacionados entre sí, que están asociados a prácticas similares y específicas (en relación a un campo diferente) en su resolución. Ejemplos de campos de problemas relacionados con la inferencia, que consideraremos al analizar los ejercicios propuestos en las PAU son determinar el tamaño de muestra necesario para llevar a cabo una estimación por intervalos con una precisión dada y contrastar una hipótesis estadística. Algunas prácticas específicas ligadas a estos campos de problemas serían diferenciar resúmenes estadísticos (de la muestra) de los parámetros (en la población); considerar una distribución muestral y realizar cálculo de probabilidades con ellas, así como fijar el error de precisión deseado en una estimación.

Mediante la reiteración de las prácticas matemáticas realizadas al resolver problemas del mismo campo, se llega a configurar el significado del objeto matemático o conjunto de prácticas asociadas al mismo. Por tanto los problemas propuestos a los estudiantes, bien durante la enseñanza, o en las pruebas de evaluación, van a incidir directamente en el aprendizaje de diferentes objetos matemáticos y el significado asignado a los mismos.

En este marco teórico se diferencia entre el *significado institucional* de un objeto matemático (compartido dentro de una institución) y el *significado personal* del mismo (que adquiere una persona, por ejemplo, un estudiante y puede ser diferente al aceptado dentro de la institución). Dentro de la institución de enseñanza, se diferencian: a) el *significado global* (sería el más amplio, en nuestro caso, el significado de la inferencia en la propia estadística); b) el *significado pretendido* del objeto dentro de un nivel educativo sería el fijado por la institución (en nuestro estudio, el marcado por las orientaciones curriculares) y c) el *significado evaluado* sería el contenido relacionado con el objeto en las pruebas de evaluación.

Nuestro trabajo se orienta a determinar el significado evaluado de la inferencia estadística en las pruebas PAU para Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. La importancia de este punto se fundamenta en que las respuestas a las pruebas de evaluación determinan en gran medida la planificación de enseñanza del tema y con ello, la formación que reciben los estudiantes. Como sugiere Godino (1996) la comprensión de un determinado objeto matemático por parte de los estudiantes no puede observarse directamente, pues es un constructo psicológico inobservable. Sin embargo, puede ser evaluada indirectamente a través de las respuestas de los estudiantes a los ítems, tareas o pruebas de evaluación, es decir, las soluciones finales; estrategias; argumentos; símbolos usados en la solución. Es fundamental entonces que las pruebas de evaluación sean válidas, es decir, que exista una correspondencia entre el significado institucional pretendido y el evaluado para un contenido. Esta correspondencia es la que tratamos de evaluar en la investigación para el contenido de inferencia.

ANTECEDENTES

Al analizar los problemas de inferencia estadística en las pruebas de evaluación nos encontramos dos tipos de referentes para nuestro trabajo: a) Estudio de las PAU realizados por otros investiga-

dores; b) Análisis del contenido matemático en ejercicios propuestos en otras pruebas de evaluación.

Análisis de las PAU de Matemáticas

Son varios los autores que han analizado las pruebas PAU en España propuestas para la asignatura de Matemáticas o Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Generalmente, el objetivo de estos estudios ha sido analizar los resultados de los estudiantes y la variabilidad de resultados dependiendo de diferentes factores. A continuación resumimos los estudios de Nortes y Nortes (2010), Vidal (2010), Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013) y Solaz, (2014).

Nortes y Nortes (2010), analizaron las respuestas de una muestra de 134 alumnos en la región de Murcia en las PAU de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en septiembre del año 2009. En su estudio analizan la distribución de la puntuación global en la prueba, que también resultó baja (los alumnos responden correctamente menos de la mitad de los ejercicios, a pesar de que en esta región tienen opción a elegir 1 ejercicio entre 2 en cada uno de cinco bloques de contenido). Asimismo comparan las puntuaciones medias en las diferentes preguntas y bloques de contenido, observando que el problema más sencillo (nota media de 7,4) fue precisamente de inferencia y consistió en la construcción de un intervalo de confianza. También detectan los errores más significativos; en el caso del problema de inferencia fueron errores al calcular el valor crítico correspondiente al nivel de confianza con una tabla de la distribución normal y errores en el manejo de desigualdades al expresar y calcular el intervalo de confianza.

Vidal (2010) clasifica los problemas de probabilidad condicional propuestos en las PAU de la comunidad valenciana a partir de un modelo teórico previo de clasificación de dichos problemas, tratando de ver si las pruebas proponen todos los problemas incluidos en dicho modelo. Analizan también el contexto de los problemas, según lo el marco de evaluación PISA (OCDE, 2009), siendo el más frecuente el contexto social, seguido por los problemas con contexto puramente matemático, es decir, descontextualizados.

Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013) realizan un análisis estadístico de los resultados obtenidos en la PAU de Matemáticas por alumnos del País Vasco en 2010. Compararon estos resultados por centro y analizaron la relación de los resultados de los estudiantes con la opinión de los profesores sobre estos estudiantes y la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje utilizada. Encontraron, en general, unos resultados muy bajos, por lo que clasificaron las pruebas como difíciles; hubo, además, pocas diferencias entre centros educativos. Un resultado no esperado fue que los centros con buenos resultados utilizaban una metodología tradicional, con poca presencia de las nuevas tecnologías.

Solaz (2014) analiza las respuestas de 104 estudiantes en las PAU de Matemáticas en 2012 en la Universidad de Barcelona, estudiando las estrategias de resolución de los problemas con el propósito de detectar errores significativos y poder incidir en la planificación de la enseñanza para resolver las dificultades de aprendizaje. Los autores diferencian entre resoluciones mecánicas, la ejecución con precisión de las operaciones, la aplicación con rigor de las propiedades y la capacidad creativa de resolución. El primer tipo de estrategia es la más frecuente, lo que indica que los alumnos han aprendido los aspectos rutinarios en la resolución de problemas. También observa falta de rigor y precisión en el planteamiento y resolución de los problemas geométricos y son muy pocos los alumnos que muestran creatividad en la resolución de los problemas.

Por nuestra parte, en trabajos previos (CONTRERAS; LÓPEZ-MARTÍN; ARTEAGA; CARRETERO, 2015; LÓPEZ-MARTÍN; CONTRERAS; BATANERO; CARRETERO, 2015) se han analizado los proble-

mas de probabilidad propuestos en las PAU de Andalucía en el periodo 2003-2014. Dichos problemas tratan sobre los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total, y Teorema de Bayes. Los resultados mostraron una frecuencia mucho mayor de propuestas de problemas de probabilidad condicional, frente a los problemas relacionados con la probabilidad simple o compuesta. En general, el análisis de los problemas mostró su dificultad, por el gran predominio de espacios muestrales compuestos, donde, además, los experimentos simples son dependientes entre sí. Igualmente, abundan los espacios muestrales formados por sucesos no equiprobables y los datos suelen estar recogidos en el enunciado en forma de probabilidad o porcentaje, formato que es más difícil que el uso de números enteros o frecuencias absolutas.

La única investigación centrada en el análisis de los problemas de inferencia estadística en la pruebas PAU es la realizada por Espinel, Ramos y Ramos (2009). Sin embargo las autoras no realizan un estudio o clasificación de los problemas de inferencia, ni tratan de identificar las variables que los definen. Su estudio se centra en las dificultades encontradas por una muestra de estudiantes al resolver dos problemas de contraste de hipótesis propuestos en las PAU en la Universidad de La Laguna (Canarias). Por ello nuestro trabajo aporta información original.

Dificultades de los estudiantes con la inferencia

Aunque nuestro objetivo es el análisis de los problemas de inferencia planteados en las PAU de Andalucía, en la valoración de los mismos es importante tener en cuenta las posibles dificultades de los estudiantes al resolverlos, que han sido descritas en la investigación previa. Son, sobre todo abundantes las relacionadas con la comprensión del contraste de hipótesis (FALK; GREENBAUM, 1995; BATANERO, 2000; HARRADINE; BATANERO; ROSSMAN, 2011).

Uno de los errores más comunes en los problemas de contraste de hipótesis es la interpretación del nivel de significación, denotado habitualmente como α , que se define como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula (H_0), supuesta cierta, es decir $\alpha = P(H_0 \text{ rechazar} \mid H_0 \text{ cierta})$. Muchos estudiantes intercambian la condición y el suceso en esta probabilidad condicional, interpretando α como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, una vez que la decisión de rechazarla se ha tomado, esto es, suponer que $\alpha = P(H_0 \text{ cierta} \mid H_0 \text{ se rechaza})$.

Otro error común descrito por Vallecillos (1999) ocurre en el planteamiento de la hipótesis nula y alternativa, pues muchos estudiantes las confunden, tomando la hipótesis nula (la que se desea rechazar) como alternativa. La creencia de que rechazar la hipótesis nula supone demostrar que es errónea se encontró en la investigación de Saldahna y Thompson (2002), quienes indican que las ideas de probabilidad y atipicidad son fundamentales para comprender la lógica del contraste de hipótesis, donde se rechaza una hipótesis nula cuando una muestra de esta población se considera lo suficientemente atípica si la hipótesis nula fuese cierta. Otros errores descritos por Espinel, Ramos y Ramos (2009) en su estudio son confundir el valor estimado de un parámetro con el hipotético, el cálculo erróneo de probabilidades y la confusión entre nivel de significación y punto crítico.

Aunque los errores descritos aparecen principalmente en el contraste de hipótesis, también es posible encontrar, pero no con tanta frecuencia, errores que se producen al interpretar los intervalos de confianza (CUMMING; WILLIAMS; FIDLER, 2004). Hay que añadir también las posibles dificultades en diferenciar la distribución estadística (datos), la distribución de la variable aleatoria (población) y la distribución muestral (distribución de un estadístico en todas las muestras de una población), que se

deben manejar simultáneamente en el trabajo con inferencia (SCHUYTEN, 1991).

En definitiva, la resolución de un problema de inferencia plantea un reto importante a los estudiantes. Por ello es importante determinar claramente cuál es el contenido de los problemas sobre inferencia en las pruebas PAU, entre otras razones, por la influencia que la puntuación obtenida en las mismas tiene sobre las posibilidades del estudiante para acceder a una titulación de su elección. En lo que sigue se describe la metodología y resultados de nuestro estudio.

METODOLOGÍA

Las pruebas de acceso a la universidad (PAU)

Las actuales Pruebas de Acceso a la Universidad están regidas por el Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regulan en España las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas (MP, 2008). A su vez este decreto se basa en la Ley Orgánica de Educación, que exige, en su artículo 38 la superación de una prueba de madurez que permita valorar los conocimientos y la capacidad de los estudiantes para iniciar sus estudios universitarios.

La prueba PAU correspondiente a Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales consta de dos opciones (opción A y opción B), cada una de ellas formada por cuatro ejercicios y donde el estudiante, bajo su parecer, elige una de ellas. Tanto la opción A, como la opción B, están divididas en tres tipologías de ejercicios. El primer ejercicio pertenece al bloque de contenidos de Números y Álgebra, el segundo al bloque de Análisis, y los ejercicios tercero y cuarto corresponden al bloque de Estadística y Probabilidad, más concretamente, uno de los problemas trata de Probabilidad y el otro es un problema de Inferencia Estadística. En la actualidad los ejercicios incluidos en cada opción tienen asignada una puntuación máxima de 2.5, luego, el 50% de la nota total de la prueba corresponde al bloque de Estadística y Probabilidad. En lo que se refiere a nuestro análisis, nos restringimos al cuarto ejercicio que corresponde a los contenidos relacionados con la Inferencia Estadística y supone el 25% de la puntuación en la prueba.

Método de análisis y muestra de problemas

La investigación llevada a cabo es de tipo cualitativa ya que se basa en el análisis de contenido. Esta técnica supone que un texto puede dividirse en unidades que pueden clasificarse en un número reducido de categorías en función de variables subyacentes, y que permiten realizar inferencias sobre su contenido (KRIPPENDORFF, 1997).

Es importante señalar que con esta investigación no se pretende extrapolar los resultados a otras pruebas diferentes a las analizadas ya que la muestra con la que se está trabajando es de tipo intencional, algo propio de la metodología cualitativa. No obstante, pensamos que las conclusiones pueden servir para conjeturar hipótesis sobre el contenido de inferencia en las pruebas realizadas otros años o en otras comunidades.

La muestra considerada en esta investigación está formada por todos los problemas propuestos en las pruebas PAU de la modalidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la Comunidad Autónoma de Andalucía desde 2003 a 2014, en total 12 años. En cada uno de estos años se revisaron las seis pruebas disponibles, con dos opciones, para cada una las cuales contiene

un ejercicio de inferencia estadística (12 problemas por año). Así pues el tamaño total de la muestra analizada es de 144 problemas. Mediante un análisis semiótico (GODINO; BATANERO; FONT, 2007) se ha analizado el contenido matemático de los problemas, resolviéndolos y determinando los objetos matemáticos que se requiere manejar para llevar a cabo dicha resolución.

Una vez realizado este análisis preliminar, se han considerado como variables para analizar: el campo de problemas específico que se plantea y que define el contenido matemático de la tarea, el contexto utilizado, la distribución de partida en la población y el parámetro sobre el que se realiza la inferencia.

RESULTADOS

Una vez elegidas las variables a analizar se identificaron las posibles categorías para cada una de ellas y para cada problema, se codificaron los datos. En lo que sigue se presentan los resultados describiendo las categorías de cada una de las variables. Para clarificar la exposición se hará referencia a una serie de ejercicios propuestos en las PAU, que se presentan como ejemplos en el Anexo. Para cada variable se presenta la distribución, global y por año, de las categorías en la muestra de problemas.

Campo de problema considerado

De acuerdo al marco teórico, los problemas matemáticos se pueden clasificar en campos de problemas, cada uno de los cuáles tiene asociado objetos y prácticas matemáticas específicas, por lo que el trabajo matemático que realiza el alumno es diferente en cada uno de ellos. El primer paso en nuestro análisis fue clasificar los ejercicios de las pruebas en cinco campos de problemas diferenciados, que se describen a continuación.

A1. Composición de las muestras y cálculos de los estadísticos de las distribuciones muestrales. Dentro de este bloque se han considerado aquellos ejercicios relacionados con la composición o enumeración de las muestras de una población finita en unas condiciones dadas o en los que se pide realizar el cálculo de sus estadísticos. Los datos que proporciona el problema, generalmente, son: el tipo de población, el tamaño de la muestra y las condiciones del muestreo aleatorio (que puede ser simple, sistemático o estratificado). El ejemplo 1 del Anexo se ha clasificado en esta categoría. En su primer apartado, partiendo de una población finita discreta, se pide enumerar todas las muestras que pueden formarse aleatoriamente y de un tamaño determinado; además se pide calcular para cada una de ellas la varianza de la muestra. En el segundo apartado se pide determinar el número de elementos que hay que elegir de diferentes estratos de una población para formar una muestra de tamaño 40 mediante un muestreo aleatorio estratificado, utilizando afijación proporcional.

Observamos que los principales objetos ligados a este campo de problemas son los de población, muestra, tamaño de muestra, tipos de muestreo y estadísticos muestrales. Se requiere también una capacidad de enumeración sistemática por parte del estudiante y razonamiento proporcional en la segunda parte, así como recordar la fórmula de cálculo de diferentes estadísticos (en este caso la varianza) y calcularlos. Son problemas relativamente sencillos en los que se evalúa sobre todo la capacidad de cálculo y recordar ciertas definiciones.

A2. Determinación de la distribución muestral y cálculo de probabilidades con dicha distribución muestral. Dentro de este apartado, hemos considerado todos aquellos problemas en los que se pide describir la distribución muestral de un cierto estadístico en poblaciones infinitas. Como dato del problema se da el tipo de población (normal o binomial, generalmente), el estadístico de interés y el tamaño de la muestra. En los casos donde se analiza la media, se facilita la información sobre la desviación típica de la población, mientras que si se trata de analizar la proporción, el estudiante ha de recordar su fórmula. Se supone que el muestreo es aleatorio con reemplazamiento, lo que implica que es posible obtener, como resultado de un número infinito de muestras aleatorias independientes de tamaño n proveniente de la población de interés, la distribución muestral del estadístico en estudio. Este dato, con frecuencia queda implícito, como ocurre en el Ejemplo 2 presentado en el Anexo, por lo que el alumno deberá asumirlo.

La distribución del estadístico en estas infinitas muestras es lo que se conoce como distribución muestral, cuyos parámetros debe calcular el estudiante, usando como datos los parámetros de la población y el tamaño de la muestra. Una vez determinada la distribución del estadístico en estudio, se suele pedir calcular probabilidades, como ocurre en la segunda parte del Ejemplo 2. Ello requiere que el estudiante sea capaz de calcular probabilidades en variables aleatorias continuas y usar para ello las tablas de la distribución normal. Vemos que el número de objetos matemáticos cuya comprensión se requiere en este campo de problemas es mayor que los necesitados en el campo de problemas anterior: muestra y población, distribución poblacional y distribución muestral, parámetros poblacionales y estadísticos muestrales, variable aleatoria continua, cálculo de probabilidades en la misma.

B1. Cálculo o interpretación de un intervalo de confianza. Dentro de este bloque se han considerado tanto los problemas en los que se pide explícitamente la construcción de un intervalo de confianza para un cierto estadístico (generalmente la media o la proporción muestral), como ocurre en el primer apartado del Ejemplo 3 incluido en el Anexo. Observamos en el ejemplo que los datos proporcionados son el tipo de población (que en el ejemplo es Binomial, queda implícita), el parámetro que se quiere estimar (la proporción en la población en el ejemplo), el tamaño de la muestra y el valor de un estadístico obtenido en la misma, que sirve como estimador del parámetro (la proporción en la muestra, en el ejemplo).

Para resolver el problema, en primer lugar el alumno ha de diferenciar entre población y muestra y entre proporción muestral y poblacional, conceptos que confunden en ocasiones los estudiantes de acuerdo a Schuyten (1991). Debe identificar que se está trabajando con la distribución binomial y calcular la media y la desviación típica de la distribución muestral, recordando sus fórmulas. Además, puesto que la muestra es muy grande, debe utilizar la distribución normal para aproximar dicha distribución muestral, aplicando la corrección de continuidad. Para obtener los extremos del intervalo debe utilizar las tablas de la distribución normal cuya lectura ha de recordar y realizar una serie de cálculos, a partir del valor de la proporción muestral estandarizado. Una variante en este campo de problemas es pedir la interpretación del intervalo, una vez calculado, punto en que aparecen errores de acuerdo a Cumming, William y Fidler (2004).

B2. Relación entre confianza, error de estimación y tamaño muestral. En este campo de problemas se han considerado todos los ejercicios en los que se solicita calcular el nivel de confianza, error de estimación o tamaño muestral después de haber fijado dos de estas variables. Como datos se da la población de partida y el estadístico, además de dos variables fijadas anteriormente. El segundo apartado del Ejemplo 3, incluido en el Anexo corresponde a este campo de problemas. En este ejemplo partiendo del error de estimación y nivel de confianza, se pide obtener el tamaño de la muestra. Para resolverlo el alumno tiene como dato la distribución de la población (que en el ejemplo, como se indicó anteriormente es binomial y no se explicita y que además, ha de aproximar mediante la distribución normal). Necesita también calcular la desviación típica de la distribución muestral de la proporción, y aplicando la fórmula de cálculo de los extremos del intervalo de confianza puede despejar el tamaño de muestra requerido para la precisión fijada. Observamos que el alumno ha de utilizar los mismos objetos matemáticos requeridos en el campo de problemas B1, el concepto de precisión y la relación entre precisión, tamaño de muestra y coeficiente de confianza.

C. Contraste de hipótesis. En los problemas clasificados dentro de esta categoría se pide al estudiante comprobar si una afirmación estadística relativa al valor de un parámetro de la población es compatible con la información aportada por una muestra aleatoria simple procedente de la misma. El Ejemplo 4 del Anexo es un ejercicio de este tipo. En su primer apartado se pide determinar las hipótesis nula y alternativa, una tarea en que encontraron muchos errores en la investigación de Vallecillos (1999). Los alumnos han de tener en cuenta que se trata de un contraste unilateral y que la hipótesis nula es la contraria a la que interesa al investigador. Es decir, la hipótesis nula sería que menos del 26% de los habitantes usan el coche particular. También se pide determinar la región crítica para el contraste, dado el nivel de significación, que sería una región unilateral, de acuerdo a las hipótesis establecidas.

En el segundo apartado se pide rechazar o mantener la hipótesis nula. El enunciado se presenta en forma afirmativa (aceptar que el 26% de los habitantes o más usan su coche), mientras que en un contraste de hipótesis lo único que se puede hacer es rechazar o no la hipótesis nula (en el ejemplo; no podemos rechazar que sean menos del 26% los que usan el coche); todo ello con el nivel de significación dado. Observamos en el ejemplo, que, además de trabajar con los conceptos de población, muestra, distribución muestral, estadístico y parámetro, se añaden conceptos nuevos, como hipótesis nula y alternativa, región crítica y de aceptación o nivel de significación.

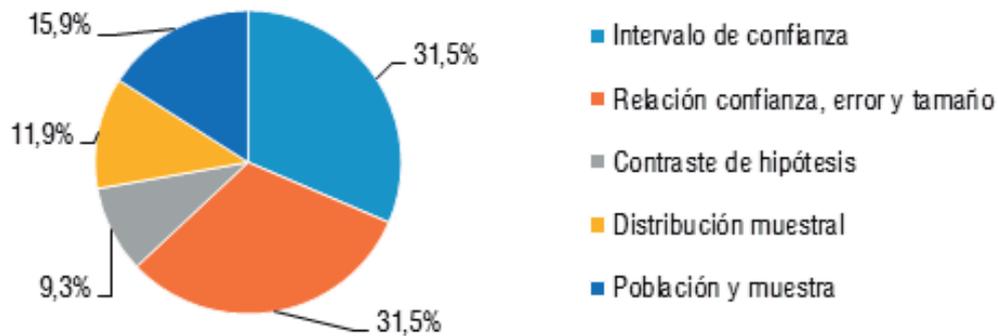
Una síntesis de los objetos matemáticos involucrados en cada uno de los cinco campos de problemas considerados se muestra en la Tabla 1 que nos permite comparar la diferente dificultad de los problemas, siendo los más sencillos los de tipo A1 y A2 y el más complejo el relacionado con el contraste de hipótesis (problemas tipo C). Asimismo se observa que diferentes campos de problemas evalúan diferentes contenidos del currículo y que todos los contenidos evaluados están incluidos en las directrices curriculares descritas en la introducción.

Tabla 1 - Contenidos matemáticos evaluados en los diferentes campos de problemas.

Contenidos		A1	A2	B1	B2	C
Concepto y propiedades	Población y muestra	X	X	X	X	X
	Muestreo con y sin reemplazamiento	X				
	Distribución muestral	X	X	X	X	X
	Relación entre estadísticos y parámetros	X	X	X	X	X
	Modelo de distribución (binomial o normal)		X	X	X	X
	Distribución normal tipificada		X	X	X	X
	Estimador de un parámetro			X	X	X
	Intervalo de confianza			X	X	
	Coefficiente de confianza			X	X	
	Amplitud de intervalo, precisión y tamaño muestral				X	
	Hipótesis (nula y alternativa; diferencias)					X
	Estadístico de contraste					X
	Nivel de significación					X
	Regiones de aceptación y rechazo					X
	Lógica del contraste					X
Procedimientos	Probabilidad condicional	X		X	X	X
	Enumerar las muestras de una población finita	X				
	Calcular estadísticos en las muestras	X				
	Calcular estadísticos de la distribución muestral	X	X			X
	Calcular tamaño de la muestra estratificada	X				
	Tipificación		X	X		
	Lectura de tablas de la distribución normal		X	X	X	X
	Cálculo de probabilidades en intervalos		X	X		X
	Cálculo de percentiles en la distribución normal			X		X
	Cálculo de extremos en intervalos de confianza			X		
	Cálculo de regiones de aceptación y rechazo					X
Toma de decisión sobre una hipótesis					X	

En la Figura 1, se presenta la clasificación de todos los problemas analizados, de acuerdo con los campos de problema descritos. Puesto que un problema contiene, usualmente, más de un apartado, si cada uno de ellos corresponde a un campo de problemas diferente, éstos se han contado como diferentes, obteniéndose un total de 270 ejercicios clasificados según el campo de problemas. Se observa que los ejercicios que aparecen con mayor frecuencia en las pruebas PAU son los relacionados con la construcción e interpretación de los intervalos de confianza (31,5%) y los que piden relacionar el coeficiente confianza, el error de estimación y el tamaño muestral (31,5%).

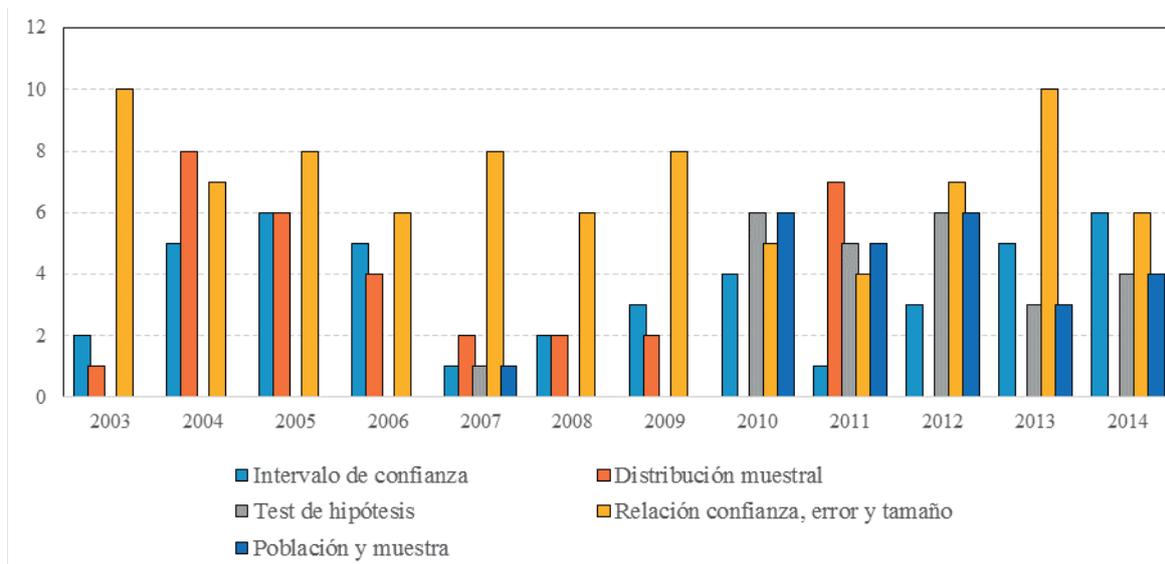
Figura 1 - Porcentaje de problemas según campo de problema.



Fuente: Construcción de los autores.

Conjuntamente, los ejercicios relacionados con el intervalo de confianza son mayoría. En este sentido, y teniendo en cuenta que en estos problemas también se evalúa la comprensión de la distribución muestral y sus estadísticos, habría escasez de problemas relacionados con el contraste de hipótesis, contenido en el currículo vigente cuando se realizaron las pruebas (MEC, 2007). Dicho contraste de hipótesis se ha suprimido en el nuevo diseño curricular (MECD, 2015), por lo que la correspondencia entre el contenido de los problemas propuestos en las pruebas de acceso y los nuevos contenidos es mejor.

Figura 2 - Clasificación por años de los tipos de problemas propuestos en las PAU



Fuente: construcción de los autores.

Al analizar los campos de problemas propuestos por año (Figura 2) se observa que los primeros ejercicios de contrastes de hipótesis aparecen en el año 2010. A partir de entonces, muchos

ejercicios propuestos lo incluyen. Estos problemas parecen ir sustituyendo a los relacionados con la distribución muestral, que van disminuyendo, indicando un cambio de tendencia en los contenidos de inferencia evaluados en las pruebas de acceso, lo que contradice el contenido del nuevo currículo (MECD, 2015), en que se ha suprimido el estudio del contraste de hipótesis. Consideramos también que este cambio aumenta la dificultad pues autores como Cumming, Williams, y Fidler (2004) indican que la comprensión de la distribución muestral es más sencilla y un requisito para la comprensión del contraste de hipótesis. Finalmente resaltamos el hecho de que los problemas relacionados simplemente con muestreo tienen una distribución muy variable. Aunque los encontramos todos los años, cabe destacar que a partir de 2010 solamente en 2011 se han propuesto ejercicios relacionados con la distribución muestral.

Contexto del problema

Una segunda variable analizada ha sido el contexto en que se formula el problema, cuyo principal objetivo consiste en mostrar la unión existente entre los conceptos y las situaciones reales, con el fin de dar sentido al aprendizaje del estudiante y conseguir de esta forma motivar su interés por las matemáticas, haciéndoles ver su utilidad. Por otro lado, Chevallard (1991) indica que, en el proceso de transposición didáctica, una vez introducido un tema en el sistema de enseñanza, el dispositivo didáctico pretende progresivamente buscarle aplicaciones, que pueden no tener relación con aquellas en que se originó el concepto. La función que tienen los contextos es permitir finalmente la recontextualización del saber.

Tenemos en cuenta los contextos considerados en las prueba PISA de evaluación organizadas por la OECD (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), donde se trata de evaluar no sólo la forma en que el estudiante aplica las matemáticas, sino también su uso en situaciones nuevas de diverso tipo (ME, 2009; MCD, 2013). Dichas pruebas, evalúan “la capacidad de formular, emplear e interpretar cuestiones matemáticas en diferentes tipos de contextos” (MCD, 2013, p. 11) mediante la resolución de tareas relacionadas con la vida real (ME, 2009, MCD, 2013). En dichas pruebas participan estudiantes de 15 años de 65 países, incluida España; por lo tanto, sería deseable que los contextos sugeridos en PISA también se tengan en cuenta en las pruebas PAU. En consecuencia, se han considerado las siguientes categorías de contexto:

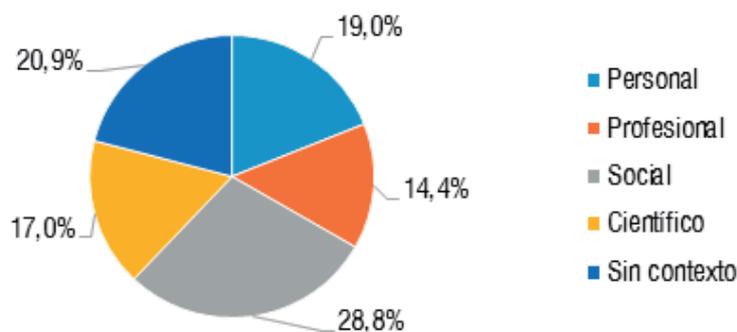
- *Situación personal:* Se incluyen en ella los problemas relacionados con las actividades del día a día del propio estudiante, su trabajo en la escuela, su vida en familia y sus relaciones con el grupo de compañeros en el tiempo de ocio, deportes u otras actividades personales. El Ejemplo 2, presentado en el Anexo sería de este tipo pues el contexto es el número de horas que dedican los estudiantes de un centro de Bachillerato a la práctica de deporte. Otros ejemplos de problemas de tipo personal en los problemas propuestos se refieren a juegos, salud, transporte personal, o viajes.
- *Situación profesional:* Son problemas que se centran en el mundo laboral en el que el estudiante formará parte en el futuro o que conoce por sus padres o amigos. En el Ejemplo 5 del Anexo encontramos uno de estos problemas que se contextualiza en estudio sobre el salario de trabajadores de una empresa. Otros ejemplos podrían ser problemas sobre presupuestos o costes de un proceso de producción o una construcción, errores en dicho proceso, diseño en carpintería, arquitectura o jardinería; coste de mano de obra, etc.
- *Situación Social:* Serían problemas que el estudiante podría encontrar en una comunidad algo

más amplia que la familiar (en su comunidad de vecinos, su ayuntamiento, ciudad o país), que puede conocer a través de los medios de comunicación, sus estudios o sus padres. En el Ejemplo 4 se incluye en esta categoría pues el alumno puede encontrarlo también en su ayuntamiento o ciudad, ya que en la actualidad se trata de fomentar el uso del carril bici. Otros ejemplos propuestos de este tipo de contexto son problemas relacionados con sistemas electorales, transporte, demografía o publicidad. Incluimos también acá los juegos de azar como la lotería, cuando se realizan a gran escala y aparecen en las noticias o Internet.

- *Situación Científica*: Los problemas clasificados en la categoría científico hacen referencia a la aplicación de las matemáticas en ciencia y tecnología, como ocurre en el Ejemplo 3, en que se describe un problema relacionado con una piscifactoría. Otros problemas relacionados con el mundo científico serían los de meteorología, ecología, medicina, genética, o física. Este tipo de situación es más abstracta que el resto, ya que implica la comprensión de un proceso tecnológico o una interpretación teórica de conceptos científicos.
- *Sin contexto*: Son situaciones matemáticas abstractas, como la presentada en el primer apartado del Ejemplo 1, en el que no se incluye ninguna aplicación a la vida real. Este tipo de problemas contradice todas las recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística y no permite al alumno ver las aplicaciones de las matemáticas o la utilidad práctica de la pregunta planteada en el problema.

Con objeto de tener una visión más general sobre la distribución de contextos utilizados a la hora de plantear los distintos tipos de problemas que constituyen las pruebas PAU se presenta la Figura 3. Se observa que se tiende a plantear problemas dentro de un contexto social ya que aproximadamente el 29% de los problemas analizados se clasifican como tales. Por otro lado, aproximadamente el 21% de los problemas analizados carecen de contexto. El resto de contextos tiene una presencia similar.

Figura 3 - Porcentaje de problemas propuestos en las PAU según el contexto

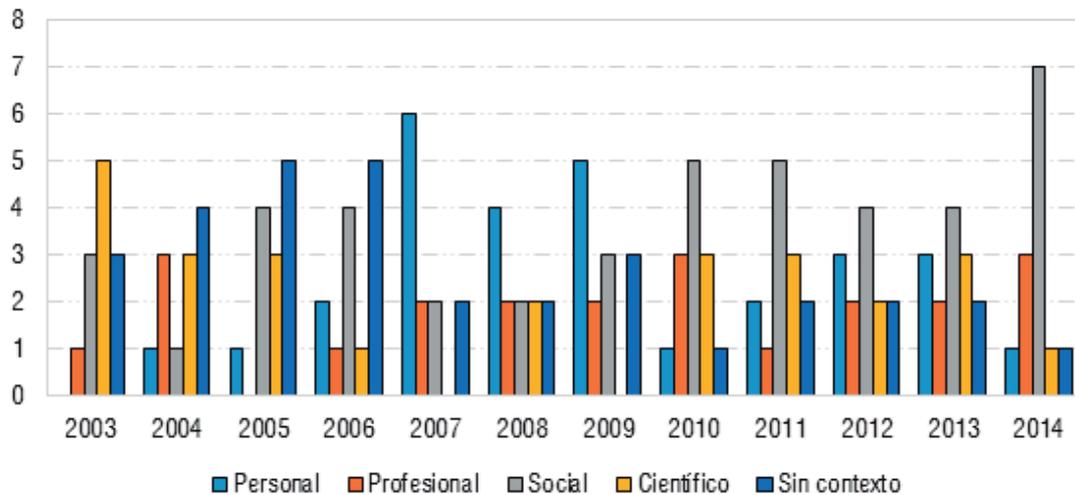


Fuente: construcción de los autores.

Al analizar los contextos por año (véase Figura 4), observamos una alta presencia de problemas formulados sobre un contexto social y una disminución significativa, en los últimos años, de los problemas sin contexto; de hecho el 75% de los problemas sin contexto han sido propuestos antes de 2010. Este hecho adquiere cierta importancia ya que se tiende a seguir las recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística disminuyendo los problemas sin contexto donde el estudiante no comprende el interés de aplicación de las matemáticas.

Si se compara los resultados obtenidos al principio y final del periodo de estudio se observa que ha habido una tendencia a modificar el contexto en el que se desarrolla el problema. Por ejemplo en 2003 hay una alta presencia de problemas con contextos propiamente científicos y no aparecen problemas con contextos personales, mientras que en 2014 más del 50% de los problemas corresponden a un contexto social y no es posible encontrar problemas propios de un contexto científico.

Figura 4 - Contextos de los ítems por cada año.



Fuente: construcción de los autores.

Distribución considerada en la población

Como se describió en la introducción, las directrices curriculares incluyen el estudio de los intervalos de confianza y contraste de hipótesis tanto para la media de una distribución normal, como para la proporción en una distribución binomial. Además se debe estudiar el teorema central del límite y su implicación para la aproximación de la distribución binomial mediante una distribución normal. Para examinar si se tiene en cuenta estos contenidos hemos analizado dos variables más.

La primera de estas variables es el modelo teórico de distribución que se considera en la población. Generalmente se parte de una distribución normal, con desviación típica generalmente conocida y se pide realizar alguna inferencia sobre el valor de la media poblacional. Así, en el Ejemplo 2 mostrado en el Anexo se da también la varianza y se pide determinar la distribución muestral y realizar con ella el cálculo de una probabilidad. En el Ejemplo 5, mostrado en el Anexo, también partiendo de una distribución normal de desviación típica conocida, se pide calcular un intervalo de confianza para la media de la población.

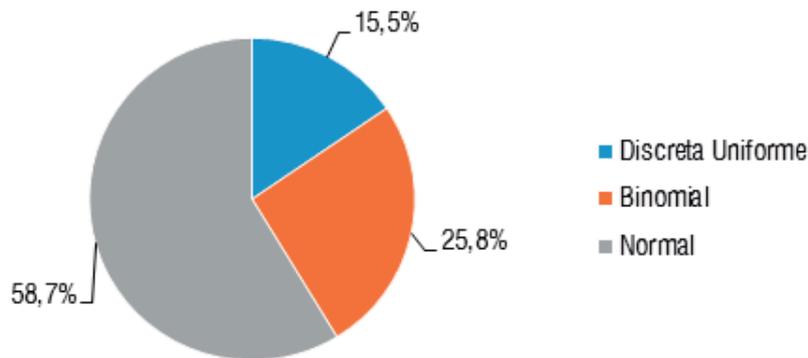
En otros problemas, como en los Ejemplos 3 y 4 del Anexo se parte de una distribución binomial, que, en la mayoría de los casos, no se indica explícitamente, sino que el alumno ha de deducir del enunciado. Este tipo de problema suele revestir más dificultad, puesto que, además de indicarse únicamente en forma implícita, no se da el valor de la varianza o desviación típica y es el alumno quien debe recordar la fórmula para determinarla. Otra dificultad añadida es que, en la mayoría de los casos, el alumno debe recordar y comprobar si se verifican las condiciones requeridas para realizar la aproximación de la distribución binomial a la normal haciendo uso al Teorema Central del Límite

para aplicarla. Posteriormente, se tipifica la proporción, para calcular el valor crítico o los límites de un intervalo de confianza, donde se ha de utilizar la corrección de continuidad.

Finalmente, en algunos problemas, sobre todo en los relacionados con la enumeración de muestras (ver Ejemplo 1 de Anexo) se usa la distribución discreta uniforme, donde se dan los elementos de la población y todos son equiprobables.

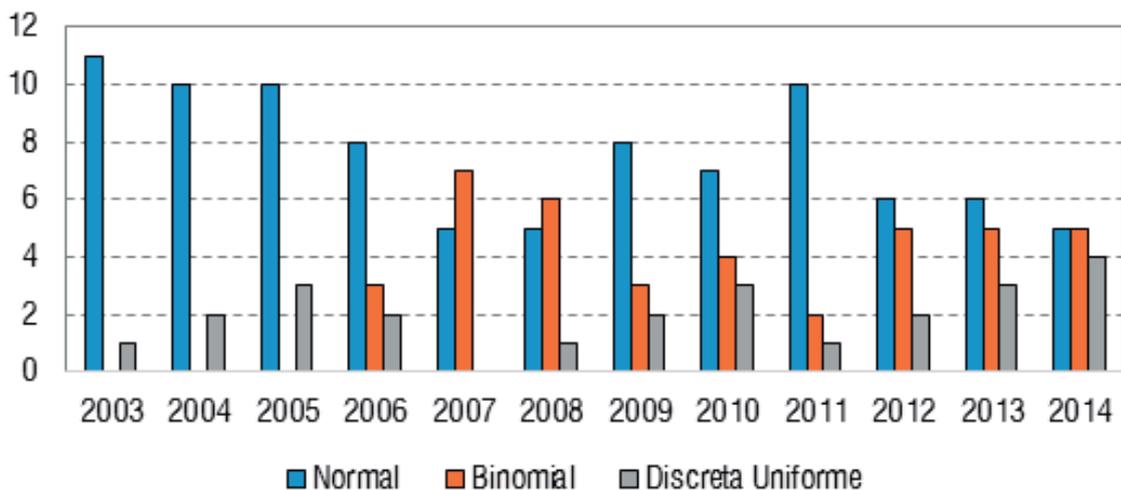
En la Figura 5 se presenta la clasificación de problemas, según la distribución de partida. Como se observa la mayoría de los ejercicios parten de la distribución normal; por tanto, respecto a los contenidos curriculares propuestos se da más importancia en la evaluación a la inferencia sobre la distribución normal que sobre la binomial o que al teorema central del límite y la aproximación normal a la distribución binomial. Por otro lado, la Figura 6 recoge el estudio de esta variable por año, viendo cómo progresivamente aumenta el porcentaje de problemas basados en las distribuciones binomial y discreta uniforme, ajustándose mejor en este punto la evaluación al contenido del currículo.

Figura 5 - Porcentaje de problemas propuestos en las PAU según modelo de distribución en la población



Fuente: Construcción de los autores.

Figura 6 - Clasificación por años de los problemas propuestos en las PAU, según distribución



Fuente: Construcción de los autores.

Parámetro que se debe estimar

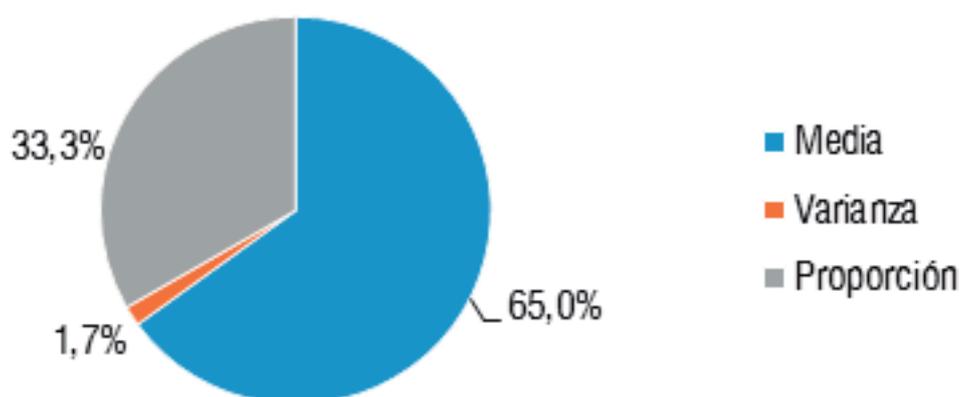
Como se vio en la introducción, los contenidos curriculares incluyen el estudio de la distribución muestral e intervalos de confianza, tanto para la media, como para la proporción; igualmente se incluye el contraste de hipótesis de la media, proporción y diferencia de medias.

Hemos analizado el parámetro que se debe estimar en cada problema, que, generalmente, se relaciona con la distribución. Si la distribución de partida de la población es normal, como en el Ejemplo 2 del Anexo, el interés es estimar la media de la población, para lo cual el alumno debe aplicar su conocimiento de la distribución muestral de la media de la muestra. Si, como en los Ejemplos 3 y 4 se pide estimar la proporción, es necesario partir de la distribución muestral de la proporción y, además, como se ha indicado, aproximarla mediante una distribución normal, aplicando el teorema central del límite.

En otros casos, como en el primer apartado del Ejemplo 1, el interés es la varianza; generalmente sólo se pide calcularla en algunas muestras y obtener una distribución muestral empírica de la misma. No se han encontrado problemas centrados en la diferencia de muestras, no considerándose este contenido curricular en las PAU.

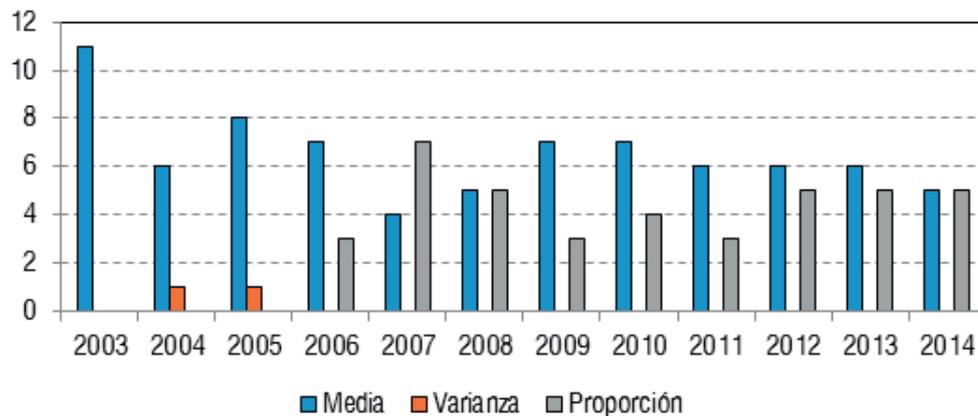
En la Figura 7 observamos la gran predominancia de problemas relacionados con la estimación de la media, y por tanto de la evaluación de los contenidos curriculares relacionados con la misma. Al estudiar la distribución a lo largo del tiempo (véase Figura 8) se observa que los problemas relacionados con la varianza aparecieron sólo al comienzo del periodo estudiado y ahora no se consideran. Por otro lado, se va haciendo más equilibrado el número de problemas que se centran en la media y en la proporción.

Figura 7 - Porcentaje de problemas propuestos en las PAU según parámetro que se debe estimar.



Fuente: Construcción de los autores.

Figura 8 - Clasificación por años de los problemas propuestos en las PAU según parámetro.



Fuente: Construcción de los autores.

CONCLUSIONES

Nuestro análisis muestra que el contenido evaluado en las pruebas PAU de la comunidad de Andalucía durante el periodo seleccionado recoge el contenido propuesto en el currículo, con excepción de los contrastes de hipótesis para la diferencia de medias, contenido que ha sido olvidado en estas pruebas.

Respecto al resto de contenidos de inferencia estadística, las pruebas dan mayor importancia al cálculo intervalos de confianza y la interpretación de los mismos, pues aproximadamente el 63% de los problemas propuestos piden calcular o interpretar un intervalo de confianza o bien relacionar el nivel de confianza, el error de estimación del intervalo o el tamaño muestral considerado para su construcción.

Analizando los contenidos evaluados en los diferentes campos de problemas hemos mostrado su complejidad, pues incluyen gran cantidad de objetos matemáticos. La proporción de ejercicios de contraste de hipótesis que se están planteando aumenta en los últimos años, en contradicción con la supresión de este contenido en el nuevo decreto publicado en el 2015 (MECD, 2015). Estos problemas son extremadamente difíciles, pues requieren el uso de muchos conceptos: población, muestra, parámetro poblacional, estadístico muestral, distribución del estadístico muestral, hipótesis nula y alternativa, región de aceptación y rechazo, nivel de significación.

Por otro lado, en el análisis de las diferentes variables se ha observado una mejora de la distribución de las diferentes categorías con el paso del tiempo, siendo más equilibrado el conjunto de contenidos evaluados en los últimos años que en el principio del periodo analizado. En este sentido, a lo largo de los años se observa la tendencia a seguir las recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística ya que los problemas propuestos se contextualizan (contextos según PISA), lo cual propicia la comprensión de la aplicación de las matemáticas al mundo real.

En general, el estudio realizado indica una alta dificultad de los problemas propuestos de inferencia estadística en las PAU que debería ser tomada en cuenta por los diseñadores de las mismas en las sucesivas ediciones o en pruebas de evaluación alternativas que se propongan en el futuro. Las dificultades descritas en la investigación sobre comprensión de la inferencia indican también el esfuerzo que deben realizar profesores y alumnos para que estos adquieran competencia y comprensión para

solventar de una forma adecuada los problemas propuestos en las PAU. Sería importante que los diseñadores curriculares y de pruebas de evaluación consideren la posibilidad de cambiar la enseñanza de la inferencia en Bachillerato hacia un enfoque informal, donde se facilite la comprensión intuitiva de los estudiantes, apoyándose en la simulación y la tecnología, como se recomienda actualmente en la investigación en educación estadística.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

BATANERO, C. Controversies around significance tests. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 2, n. 1-2, 7 p. 5-98, 2000.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.

CONTRERAS, J. M.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; ARTEAGA, P.; CARRETERO, M. Probability content in the entrance to university tests in andalucia. Presentado en la International Conference. **Turning data into knowledge: new opportunities for Statistics Education**. Lisboa: Instituto de Educaçao. Junio, 2015.

CUMMING, G.; WILLIAMS, J.; FIDLER, F. Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. **Understanding Statistics**, v. 3, p. 299-311, 2004.

ESPINEL, M.C.; RAMOS, C. E.; RAMOS, R. M. Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. **SUMA**, v. 61, n. 1, p. 35-44, 2009.

FALK, R.; GREENBAUM, C. W. Significance tests die hard: The amazing persistence of a probabilistic misconception, **Theory and Psychology**, v.5, n.1, p. 75-98, 1995.

GODINO, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference*, v. 2, p. 417-424. Universidad de Valencia.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1-2, p. 27-135, 2007.

HARRADINE, A.; BATANERO, C.; ROSSMAN, A. Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.): **Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education**. Netherlands: Springer, p. 235-246, 2011.

KRIPPENDORFF, K. **Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica**. Barcelona: Paidós. 1997.

LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C.; CARRETERO, M.. Los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. **Areté**, v. 1, n. 1, p. 39-60, 2015.

MCD, MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. PISA **Programa para la evaluación internacional de los estudiantes. Informe español. Resultados y contexto.** Madrid: Autor, 2013.

ME, MINISTERIO DE EDUCACIÓN PISA 2009. **Programa para la evaluación internacional de estudiantes de la OCDE. Informe español.** Madrid: Autor, 2009.

MEC, MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA. **Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.** Madrid: Autor, 2007.

MECD, MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. **Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.** Madrid: Autor, 2015.

MP, MINISTERIO DE LA PRESIDENCIA. **Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas.** Madrid: Autor, 2008.

NORTES, A. N; NORTES, R. Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. **Educatio Siglo XXI**, v. 28, n. 1, p. 317-342, 2010.

OCDE. **PISA 2009 assessment framework - key competencies in reading, mathematics and science.** Paris: OCDE, 2009.

RUIZ, J.; DÁVILA, P.; ETXEBERRIA, J.; SARASUA, J. Pruebas de selectividad en Matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones de los profesores. **Revista de Educación**, v. 362, n. 1, p. 217-246, 2013.

SALDANHA. L.; THOMPSON, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, n.1, p. 257-270.

SCHUYTEN, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. In D. VereJones (Ed.): **Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics.** Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, p. 486-490.

SOLAZ, A. M. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. **Educatio Siglo XXI**, v. 32, n.1, p. 233-254.

VIDAL, E. **Els problemes de probabilitat condicional en les PAU de la CV.** Tesis de Máster. Universidad de Valencia, 2010.

VALLECILLOS, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. **Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute** Helsinki: International Statistical Institute, p. 201-204.

RECEBIDO EM: 20. jun. 2016.

CONCLUÍDO EM: 10. ago. 2016

ANEXO - EJEMPLOS DE PROBLEMAS

Ejemplo 1. Ítem 3A (2014)

a) Determine todas las muestras de tamaño 2 que, mediante muestreo aleatorio simple, se pueden extraer del conjunto $\{6, 9, 12\}$ y calcule la varianza de las medias de estas muestras.

b) Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D, de los que elabora diariamente 40, 15, 25 y 120 unidades respectivamente. Si un día se quiere elaborar una muestra de 40 unidades con los productos fabricados, por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de unidades de cada producto se debe elegir?

Ejemplo 2. Ítem 3B (2004). El número de horas semanales que los estudiantes de Bachillerato de una ciudad dedican al deporte se distribuye según una ley Normal de media 8 y varianza 7,29.

a) Para muestras de tamaño 36, indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 36 esté comprendida entre 7,82 y 8,36 horas?

Ejemplo 3. Ítem 6A (2013). Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.

b) A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0,02, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Ejemplo 4. Ítem P1B (2012). Un informe de un Ayuntamiento afirma que al menos el 26% de los usuarios del carril bici habrían utilizado el coche particular para sus desplazamientos de no haber existido dicho carril. Sin embargo, un periódico local anuncia la falsedad del dato, informando que una encuesta propia indica que solo 240 de los 1000 usuarios encuestados afirman que habrían utilizado el coche particular.

a) Establezca un contraste, con hipótesis nula, para verificar la afirmación del Ayuntamiento e indique la región crítica de dicho contraste para un nivel de significación del 5%.

b) Con este nivel de significación ¿podría aceptarse el informe del Ayuntamiento?

Ejemplo 5. Ítem 1A (2007). El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución Normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio con un nivel de confianza del 98%.

a) Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud, como máximo, de 6 euros.